Εξετάσεις **ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΙ** (27.9.2000)

Θέμα 1° i) Έστω $f: IR \to IR$ και $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, αποδείξτε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' βρίσκεται το πολύ μία ρίζα της f.

ii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in IR$ για τον οποίο η εξίσωση $x^3 + 12x + k = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα [-1,1]. (Υπόδειξη, χρησιμοποιείστε το θεώρημα Rolle).

Θέμα 2° Έστω $a, b \in IR$ με $a < b$ και $f:(a,b) \to IR$ διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $\xi > b - \delta$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x)e^{-x}$).

Θέμα 3° Έστω $f: IR \to IR$ μία συνάρτηση και $n \in IN$.

i) Αν $n \geq 2$ και $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n \ \forall\, x, y \in IR$, τότε η f είναι σταθερή.

ii) Τι συμβαίνει αν $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \ \forall\, x, y \in IR$;

Θέμα 4° i) Αν $f, g:[a,b] \to IR, a < b$, συνεχείς και $\exists\ f', g':(a,b) \to IR$ με $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)$, να αποδειχθεί τότε ότι:

(α) $g(b) \neq g(a)$ και β) $\exists\ \xi \in (a,b): \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ii) Αν $f, g:[a,b] \to IR$ συνεχείς, να αποδειχθεί τότε ότι $\exists\ \xi \in (a,b): g(\xi)\int_a^b f(t)dt = f(\xi)\int_a^b g(t)dt$.

Θέμα 5° i) Αποδείξτε ότι $\dfrac{x^n}{n!} < e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \ldots - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} < \dfrac{x^n}{n!}e^x, \ \forall\ x > 0$.

ii) Έστω $a \in IR$ και $h > 0$ και $f:[a, a+h] \to IR$. Διατυπώστε ικανές συνθήκες για την f ώστε να υπάρχουν $0 \leq \vartheta_1 \leq 1$ και $0 \leq \vartheta_2 \leq 1$ με τις ιδιότητες:

α) $f(a+h) = f(a) + hf'(a + \vartheta_1 h)$, β) $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{2}f''(a + \vartheta_2 h)$.

Θέμα 6° Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχείς οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x,\ x \in IR,\ g(x) = \begin{cases} x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\quad h(x) = \sqrt{1 + x^2},\ x \in IR,\ k(x) = \frac{1}{x-3},\ x \in (3, +\infty)$$

Θέμα 7° Διατυπώστε και αποδείξτε το 1° Θ.Θ.Α.Λ. και εξετάστε αν οι υποθέσεις του είναι απαραίτητες (δικαιολογημένη απάντηση).

Θέμα 8° i) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}dx$.

ii) Αν $0 < a < 3\pi/4$ και $\displaystyle\int_0^a \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}dx = \pi/4$, υπολογίστε τότε το a.

(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε το i)).

Θέμα 9° i) Έστω $f:[a,b] \to IR$ $(a < b)$ ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η $|f|:[a,b] \to IR$ ολοκληρώσιμη και ισχύει $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. Ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός; (δικαιολογημένη απάντησ

ii) Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_{2\pi}^{2\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu^2(e^x)dx \leq \frac{16}{3}\pi^3$.

Θέμα 10° i) Διατυπώστε (με ακρίβεια και χωρίς απόδειξη) τους τύπους διαφόρισης και ολοκ της Δυναμοσειράς.

ii) Βρείτε τη συνάρτηση $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Απαντήστε σε οκτώ (8) από τα δέκα (10) θέματα.