ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέματα εξετάσεων Απειροστικού Λογισμού ΙΙ (Ημερομηνία 29 Μαΐου 2000)

Θέμα 1° Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$, να αποδειχθεί ότι η αντίστροφη της $f^{-1}:(c,d)=f((a,b))\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη με $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$

Αν $g:(-a,a)\to\mathbb{R}$ $(a>0)$ είναι συνεχής στο $x=0$, αποδείξτε ότι η $xg(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θέμα 2° Αν $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε ισχύει. Αν $x,y\in(a,b)$ τυχόντα με $x<y$, τότε για $t,s\in[x,y]\subset(a,b)$ ισχύει $|f(t)-f(s)|\leq M|t-s|$, όπου $M=\max\{|f'_+(x)|,|f'_-(y)|\}$ και συνεπώς κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα είναι συνεχής.

Θέμα 3° α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x\log x$ $x>0$ είναι γνήσια κυρτή.
β) Έστω $\alpha,\beta,x,y\in(0,+\infty)$ ώστε $\alpha y\neq\beta x$. Αποδείξτε ότι $(x+y)\log\frac{x+y}{\alpha+\beta}<x\log\frac{x}{\alpha}+y\log\frac{y}{\beta}$.
(Υπόδειξη, χρησιμοποιήστε το 3α)).

Θέμα 4° Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κυρτή και διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι φραγμένη αποδείξτε ότι η f είναι φθίνουσα.

Θέμα 5° α) Αν $0<x<1$, αποδείξτε ότι $x+\log(1-x)<0$. (κατά προτίμηση χρησιμοποιήστε τον ορισμό του λογαρίθμου. β) Χρησιμοποιώντας το α) αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\log$ συγκλίνει.

Θέμα 6° Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε, για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ και για κάθε $\varepsilon>0$ αποδείξτε ότι υπάρχει επιλογή $E_{\mathcal{P}}$ ενδιαμέσων σημείων της $\mathcal{P}$ ώστε να ισχύει

$$L(f,\mathcal{P})\leq S(f,\mathcal{P},E_{\mathcal{P}})<L(f,\mathcal{P})+\varepsilon.$$

Θέμα 7° α) Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $A=\{x\in[0,1]:f(x)\neq g(x)\}$. Αποδείξτε ότι αν το A είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ η g είναι ολοκληρώσιμη.
β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ άρρητος}\\ x, & x \text{ ρητός}\end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θέμα 8° Υπολογίστε τα ολοκληρώματα α) $\int\frac{x\,\text{τοξεφ}x}{(1+x^2)^2}dx$ β) $\int\frac{1}{\text{ημ}x}dx$

Θέμα 9° Έστω ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, και $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ $x\in[0,1]$

Αν $\{a_n\}$ είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία στο $[0,1]$ αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|f(a_n)-f(a_{n+1})|<+\infty$.

Θέμα 10° α) Διατυπώστε και αποδείξτε τον τύπο ολοκληρώσεως δυναμοσειράς
β) Βρείτε την συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}x^n$

Σημείωση: Να γραφούν οκτώ (8) από τα δέκα (10) θέματα