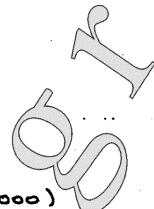


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης



Θέματα εβδομάδων Απεριοριστού Λογισμού II (Ημερομηνία 29 Μαΐου 2000)

Θέμα 1 Αν $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησιας μονότονη και παραγωγική με $f'(c) < 0$ και αποδειχθεί ότι η αντιεπιφράνη $f'(c,d) = f((c,d)) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορική με $(f')' = \frac{1}{f'(c,d)}$.

$g: (a,a) \rightarrow (a,a)$ είναι συνεχής στο κέντρο, αποδειχθεί ότι η $xg(x)$ είναι παραγωγική στο 0.

Θέμα 2 Αν a, b και $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι υπότιμη, τότε ισχύει. Αν $x, y \in (a,b)$ τυχόντα με $x < y$, τότε για $t, s \in [x,y] \subset (a,b)$ ισχύει $|f(t) - f(s)| \leq M|t-s|$, οπου $M = \max\{|f'(x)|, |f'(y)|\}$ και συνεπώς κάθε υπότιμη συνάρτηση οριζόντια σε ένα ανοικτό διάστημα είναι συνεχής.

Θέμα 3 Αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x \log x - x > 0$ είναι γνησιας υπότιμη.

ε) Εστια $a, b, x, y \in (0, +\infty)$ ώστε $xy \neq bx$. Αποδειχθεί ότι $(x+y) \log \frac{xy}{a+b} < x \log \frac{x}{a+b} + y \log \frac{y}{a+b}$. (Υπόθεση, χρησιμοποιήστε το 3a).

Θέμα 4 Εστια $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ υπότιμη και διαφορική συνάρτηση. Αν η f είναι φραγμένη αποδειχθεί ότι η f' είναι φθίνουσα.

Θέμα 5 α) Αν $-0 < x < 1$, αποδειχθεί ότι $x + \log(1-x) < 0$. (Κατά προτίμην χρησιμοποιήστε τόν οριακό του λογαριθμού. β) Χρησιμοποιώντας τό a) αποδειχθεί ότι η αυστησία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ συγχίνει.

Θέμα 6 Εστια $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε, κάτια κάθε διαμέρισμα \mathcal{P} του $[a,b]$ και για κάθε $\epsilon > 0$ αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα λογισμό $E_{\mathcal{P}}$ ενδιαφέσων σημείων της \mathcal{P} ώστε να ισχύει $L(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}, E_{\mathcal{P}}) < L(f, \mathcal{P}) + \epsilon$.

Θέμα 7 α) Εστια $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες συνάρτησης και $A = \{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}$. Αποδειχθεί ότι αν το A είναι πεπερασμένο, τότε f είναι ολουληρώσιμη $\Leftrightarrow g$ είναι ολουληρώσιμη.
β) Επειδή αν η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ δημητρ.} \\ x, & x \text{ ρητός} \end{cases}$ είναι ολουληρώσιμη.

Θέμα 8 Καταλογίστε τα ολουληρώσιμα α) $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2} dx$ β) $\int \frac{1}{\ln x} dx$

Θέμα 9 Εστια ολουληρώσιμη συνάρτηση $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, και $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ $x \in [0,1]$

Αν $\{f_m\}$ είναι συνεχής φθίνουσα αυστησία στο $[0,1]$ αποδειχθεί ότι $\sum_{m=1}^{\infty} |f_m(a_m) - f_m(a_{m+1})| < +\infty$.

Θέμα 10 α) Διατυπώστε και αποδειχθεί τον τύπο ολουληρώσιμων συνάργυσεράς.

β) Βρείτε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)}{m!} x^m$

Συγκειώστε: Να γραφούν συνάρτηση (8) από τα δύο (10) θέματα