Θέματα εξετάσεων Απειροστικού Λογισμού ΙΙ Ημερομηνία 19-Ιουν.-2001

Θέμα 1ο Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές διαφορίσιμη (υπάρχει η n-οστή παράγωγος της f για κάθε $n\in\mathbb{N}$)
Υποθέτουμε ότι, γιά κάποιο ακέραιο n, $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$
Αποδείξτε ότι $f^{(n+1)}(x)=0$ για κάποιο $x\in(0,1)$.

Θέμα 2ο α) Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ $x\in[\alpha,\beta]$. Εάν $x_0\in(\alpha,\beta)$ και η f είναι συνεχής στό x_0 αποδείξτε ότι $F'(x_0)=f(x_0)$.
β) Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ορισμένη ως εξής: $f(t)=0$ αν $t<0$, $f(t)=t$, αν $0\le t\le 1$ και $f(t)=4$ αν $t>1$ i) Να ορισθεί η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$, σχεδιάστε την F.
ii) Πού είναι διαφορίσιμη η F; Να υπολογισθεί η F' στά σημεία διαφορισιμότητας.

Θέμα 3ο Να ορίσετε την συνάρτηση $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και να αποδείξετε ότι i) $1-\frac{1}{x}<\log x<x-1$ για $x>0$, $x\neq 1$
ii) $\log e=1$ (όπου $e:=\lim_n(1+\frac{1}{n})^n$) iii) η $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$, $n\geq 1$ είναι συγκλίνουσα

Θέμα 4ο Εστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι i) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<\frac{f(z)-f(x)}{z-x}<\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
γιά $\alpha<x<y<z<\beta$. ii) η f είναι συνεχής

Θέμα 5ο α) Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής στό (α,β). Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.
β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$ όπου $f(x)=x-[x]$ $x\in[0,2]$.

Θέμα 6ο i) Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη μέ $g(x)\geq 0$, $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$
Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\int_\alpha^\beta fg=f(\xi)\int_\alpha^\beta g$ ii) Υπολογίστε τό $\int_0^{2\pi}\frac{x\,\text{συν}x}{1+\text{ημ}^2x}dx$

Θέμα 7ο i) Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, $f(x)\geq 0$ $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$ και $f(x_0)>0$ για κάποιο $x_0\in[\alpha,\beta]$
Αποδείξτε ότι $\int_\alpha^\beta f>0$. Ισχύει το συμπέρασμα χωρίς τήν υπόθεση τής συνέχειας;
(πλήρης αιτιολόγηση). ii) Εστω $a\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι δέν υπάρχει $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, θετική συνεχής ώστε $\int_0^1 f=1$, $\int_0^1 xf=a$ και $\int_0^1 x^2f=a^2$.

Θέμα 8ο Υπολογίστε τά ορισμένα ολοκληρώματα $I=\int_0^{\pi/2}\log(\text{ημ}x)dx$ και $II=\int_0^{\pi}x\log(\text{ημ}x)dx$

(Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι $\int_0^{\pi/2}\log(\text{ημ}2x)dx=\frac{\pi}{2}\log 2+2I$. Για το δεύτερο χρησιμοποιήστε το πρώτο και θέσατε $x=\pi-t$)

Θέμα 9ο i) Να υπολογίσετε τήν παράγωγο της αντίστροφης $g(x)=\text{τοξεφ}(x)$, $x\in\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x)=\text{εφ}x$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)$.
ii) Αποδείξτε ότι $\text{τοξεφ}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+-\cdots$

Θέμα 10ο Υπολογίστε τά ολοκληρώματα $\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ και $\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

Σημείωση: