Απειροστικός λογισμός Ι, 25/2/99.
(Γράψτε (5) πέντε θέματα).

Θ.1) α) Έστω $n \geq 1$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ μη αρνητικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

β) (i) Υπάρχει συνάρτηση $f: [0,1] \longrightarrow (0,1]$ συνεχής και επί;

(ii) Υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ συνεχής και επί;

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Θ.2) α) Εξετάστε αν ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία $\lim_n a_n = 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ (Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

γ) Αποδείξτε ότι για συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Θ.3) α) Έστω $A = \{ t \in \mathbb{Q} : t > 0$ και $t^2 < 3 \}$. Αποδείξτε ότι

(i) το A είναι φραγμένο σύνολο. (ii) $(\sup A)^2 = 3$, και (iii) $\sup A$ άρρητος.

β) Αποδείξτε πλήρως ότι $\inf (0,1) = 0$.

Θ.4) α) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Αν η f έχει ρίζα στο $[a, b + \frac{1}{n}]$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα στο $[a, b]$.

β) Αν a, b πραγματικοί αριθμοί και $a > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $na > b$.

Θ.5) α) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $B_n = \sup \{ |a_{n+p} - a_n| : p = 1, \ldots \}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία

(ii) $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$

β) Αν $f, g: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε και η $f+g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_\alpha^\beta f+g = \int_\alpha^\beta f + \int_\alpha^\beta g$.

Θ.6) α) Έστω $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0) = f(1)$ και n φυσικός αριθμός, $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,1]$ με $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

β) Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί με $a < b$.

(i) ορίστε την έννοια της διαμέρισης του $[a,b]$.

(ii) Αν P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ με $P_1 \subseteq P_2$, αποδείξτε ότι $U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$.