ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 1998

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 1997-98

Β. ΔΟΥΓΑΛΗΣ - Μ. ΜΗΤΡΟΥΛΗ - Σ. ΝΟΤΑΡΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων = 110. Άριστα = 100)

1. **Σφάλματα στρογγύλευσης**

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω πράξεις γίνονται με αριθμητική κινητής υποδιαστολής, πεπερασμένης ακρίβειας.

(α) Εκτιμήστε το σχετικό σφάλμα κατά την αφαίρεση $x - y$, όπου $x, y \in \mathbf{R}$ με $x \simeq y$. (5)

(β) Πώς θα υπολογίσετε ευσταθώς, για $x \in \mathbf{R}$, $|x| \ll 1$, την συνάρτηση f: (5)

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0. \end{cases}$$

(γ) Εκτιμήστε το σχετικό σφάλμα κατά την αφαίρεση $x - y$, όπου x, y *αριθμοί μηχανής* με $x \simeq y$. (5)

(δ) Εστω x, y αριθμοί μηχανής με $x \simeq y$. Πώς θα υπολογίζατε την ποσότητα $(x-y)^2$: ως $(x-y)\cdot(x-y)$ ή ως $x^2 + y^2 - 2xy$; (7)

2. **Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων**

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := e^x - 5x = 0$.

(α) Δείξτε ότι έχει δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$. Δείξτε ότι $\rho_1 \in (0,1)$, $\rho_2 \in (2,3)$. (5)

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n): $x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n}}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ συγκλίνει στη ρίζα ρ_1 για κάθε $x_0 \in [0,1]$. Δείξτε επίσης ότι $\dfrac{x_{n+1} - \rho_1}{x_n - \rho_1} \to \dfrac{e^{\rho_1}}{5}$, $n \to \infty$. Υπάρχει διάστημα που να περιέχει την ρίζα ρ_2, στο οποίο να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για την επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n}}{5}$; (8)

(γ) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την προσέγγιση των ριζών της f. Χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου, δείξτε ότι $x_n \to \rho_1$ αν $x_0 < \ln 5$ και ότι $x_n \to \rho_2$ αν $x_0 > \ln 5$. (9)

3. **Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων**

(α) Εστω $B \in \mathbf{R}^{n,n}$ με $\|B\|_\infty < 1$. Δείξτε ότι ο $I + B$ είναι αντιστρέψιμος και ότι $\|(I+B)^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{1 - \|B\|_\infty}$. (6)

(β) Θεωρήστε τον πίνακα $A \in \mathbf{R}^{n,n}$, $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & & & & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 0 & & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 2 & 8 & 3 & 1 \\ & 0 & & 2 & 8 & 3 \\ & & & & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι $\kappa_\infty(A) \leq 7$, όπου $\kappa_\infty(A)$ ο δείκτης κατάστασής του ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. (8)

(γ) Διατυπώστε πλήρως ένα γρήγορο αλγόριθμο για την ανάλυση του πίνακα του ερωτήματος (β) σε μορφή $L \cdot U$ και μετρήστε το πλήθος των πράξεων και θέσεων μνήμης που απαιτεί.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε την ανάλυση του A στη μορφή

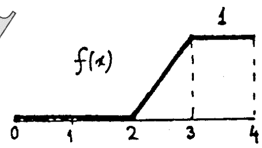
$$\begin{pmatrix} * & * & & & * \\ * & * & * & & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *^{\zeta} & & & \\ * & * & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & & * & * \\ & & & * \quad * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & *^{\varepsilon} & & *^{h} \\ & * & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix}).$$ (10)

4. Παρεμβολή

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1+x, & -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$. Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $p_2(x)$, βαθμού ≤ 2, που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1, καθώς και το σφάλμα $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_2(x)|$. (10)

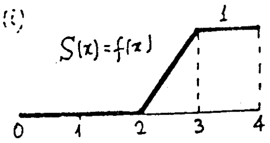
(β) Θεωρήστε την συνάρτηση $f : [0,4] \to \mathbf{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{αν } 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{αν } 3 < x \le 4. \end{cases}$$

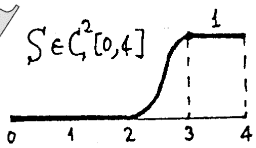


Εστω S η κυβική spline παρεμβολής της f στα σημεία $\{x_i\} = \{0,1,2,3,4\}$ με συνοριακές συνθήκες δευτέρων παραγώγων στα άκρα 0 και 4. Είναι η S κάποια από τις παρακάτω συναρτήσεις; Δικαιολογήστε πλήρως την αποδοχή ή απόρριψη καθε μιάς από τις συναρτήσεις (i)–(iv). $(4 \times 3 = 12)$

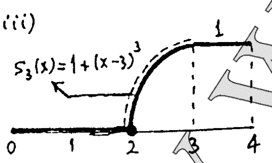
(i)



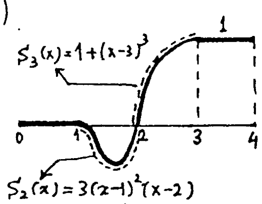
(ii)



(iii)



(iv)



5. Αριθμητική ολοκλήρωση

(α) Δίνεται το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 7)\, dx$. Εξηγήστε γιατί ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου δεν αναμένεται να υπολογίζει την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος. Βρείτε το Ελάχιστο [redacted] πλήθος υποδιαστημάτων που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου με ομοιόμορφο διαμερισμό. (10)

(β) Υπολογίστε τα βάρη w_1, w_2, w_3 στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx \simeq w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας του εν λόγω τύπου; (n+1) (10)