

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι  
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 1998-99  
Β. ΔΟΥΓΛΑΗΣ - Μ. ΜΗΤΡΟΥΛΗ - Σ. ΝΟΤΑΡΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων = Άριστα = 100)

1. Σφάλματα στρογγύλευσης Θεωρήστε έναν υπολογιστή με σύνολο αριθμών μηχανής με παραμέτρους  $\beta = 10$ ,  $t = 5$ ,  $-L = U = 100$ , (στρογγύλευση), και υποθέστε ότι  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι οποιοδήποτε θετικοί αριθμοί μηχανής. Αν με  $\oplus$  (όπου  $*$  = +, -, ·, /) συμβολίσουμε την πράξη  $*$  σ' αυτόν τον υπολογιστή, ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

(α)  $x \oplus y = y \oplus x$

(β)  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

(γ)  $0.5 \odot x = x \odot 2$

(δ) Αν  $x \leq y$ , τότε  $x \leq (x \oplus y) \odot 2 \leq y$

Δικαιολογήστε πλήρως κάθε θετική απάντησή σας και δώστε αντιπαράδειγμα για κάθε αρνητική. (Υποθέστε ότι καμία πράξη δεν καταλήγει σε υπερ- ή υπεκ-χείλιση.)

(4 × 5 = 20)

2. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Θεωρήστε την εξίσωση  $f(x) := x - 2 \sin x = 0$ .

- (α) Μελετήστε την συνάρτηση  $f$  για  $x \in [-\pi, \pi]$  και κάντε την γραφική της παράσταση. Δείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει στο  $[-\pi, \pi]$  ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες,  $-\rho$ ,  $0$ , και  $\rho$ , όπου  $\rho \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ . (9)

- (β) Θεωρήστε την ακολουθία  $(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την προσέγγιση της  $\rho$  με  $x_0 = \pi$ . Δείξτε ότι  $x_n \rightarrow \rho$ . (9)

- (γ) Υποθέστε ότι  $0 < x_0 < \frac{\pi}{3}$ . Συγκλίνει η ακολουθία  $(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , της μεθόδου του Νεύτωνα στη ρίζα  $x^* = 0$ ; (6)

### 3. Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων

(α) Ένας πίνακας  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  λέγεται ορθογώνιος αν  $U^T U = I_n$ , όπου  $I_n$  ο  $n \times n$  μοναδιαίος πίνακας. Δείξτε ότι οι ορθογώνιοι πίνακες έχουν την καλύτερη δυνατή κατάσταση ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , δηλ. δείξτε ότι  $\kappa_2(U) := \|U\|_2 \|U^{-1}\|_2 = 1$ . (9)

(β) Εστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αντιστρέψιμος πίνακας. Πώς θα υπολογίσετε με αποτελεσματικό τρόπο:

(i) Τον αριθμό  $\lambda = (A^{-1} b)^T c$  για δεδομένα  $c, b \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) Την λύση  $x$  του γραμμικού συστήματος  $A^5 x = b$  για δεδομένο  $b \in \mathbb{R}^n$ .

(iii) Την λύση  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  της εξίσωσης πινάκων  $XA = B$  για δεδομένο  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

(9)

### 4. Παρεμβολή

(α) Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής  $p \in \mathbb{P}_2$  που παρεμβάλλεται στις τιμές της  $f(x) := x \ln x$  στα σημεία 1, 2 και 4. Αν  $\varepsilon(p) := \max |f(x) - p(x)|$  δείξτε ότι  $\frac{1}{48} \leq \varepsilon(3) \leq \frac{1}{3}$ . (10)

(β) Εστω  $s_1(x) = 1 + c(x+1)^3$ , όπου  $c$  είναι μία πραγματική σταθερά. Υπολογίστε το πολυώνυμο  $s_2(x)$  έτσι ώστε η συνάρτηση

$$s(x) := \begin{cases} s_1(x) & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ s_2(x) & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

να είναι κυβική spline ως προς το διαμερισμό  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$  του διαστήματος  $[-1, 1]$  με συνοριακές συνθήκες  $s''(-1) = s''(1) = 0$ . (10)

### 5. Αριθμητική ολοκλήρωση

(α) Βρείτε τον αριθμό των υποδιαστημάτων που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \cos x \, dx$  με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-6}$  χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο που τραπεζίου με ομοιόμορφο διαμερισμό. (8)

(β) Υπολογίστε τα βάρη  $w_1, w_2, w_3$  στον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-2}^2 f(x) \, dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

Ποιός είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμου το οποίο ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς;

(10)