

1. α) [10] Έστω το μη κενό, πεπερασμένο, υποσύνολο $B = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ του \mathbb{R}^n .
 Πότε λέμε ότι το B είναι γραμμικά εξαρτημένο? Έστω διανύσματα $a_1 = (x, y, z)$,
 $a_2 = (1, 0, 2)$ και $a_3 = (-1, 1, 3)$.

Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη - συναρτήσεως των x, y, z - έτσι ώστε τα a_1, a_2, a_3 να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

β) [10] Τι καλούμε βάση και διάσταση ενός υπόχωρου U του \mathbb{R}^n ? Έστω τώρα οι
 υπόχωροι $U_1 = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 2z = 0\}$ και $U_2 = \{(x, y, z, w) \mid y - z = 0\}$. Βρείτε
 μια βάση και τη διάσταση της τομής τους.

γ) [8] Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x - y + 2z + w &= 1 \\ 2x - 3y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

δ) [7] Έστω τετράεδρο T με κορυφές τα σημεία $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 2)$,
 $\Gamma = (1, -1, 0)$ και $\Delta = (1, 1, 1)$. Βρείτε τον όγκο του T .

ε) [15] Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int (x^2 + 1) \ln x dx$ και $\int \frac{3}{x^2 + x - 2} dx$

ζ) [20] Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$e^{2x} dy + 2(ye^{2x} - x) dx = 0 \quad y'' - 3y' - 10y = x + 1$$

η) α) [10] Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$ και έστω τα σημεία $A = (0, 1)$
 και $B = (1, 2)$. Βρείτε την κατά διεύθυνση παράγωγο της $f(x, y)$ στο σημείο B στη
 διεύθυνση του διανύσματος από το B στο A . Τέλος, υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της
 κατά διεύθυνση παραγώγου της f στο B .

β) [10] Βρείτε και χαρακτηρίστε, τα κρίσιμα σημεία της

$$f(x, y) = -2x^2 - \sqrt{2}xy + 2x + 2y + 3.$$

θ) [10] Δώστε τον ορισμό μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Διατυπώστε με απλά λόγια τι λέμε
 άθροισμα της παραπάνω σειράς. Τέλος, υπολογίστε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$$

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Η διατύπωση της έκφρασης, καθώς και η καθαρότητα της γραφής θα θεωρηθούν ένα επιπλέον προσόν στη διαμόρφωση του τελικού βαθμού.
- Γραπτό που δεν διαβάζεται, ΔΕΝ θα διορθώνεται.
- Καλή Τύχη!