

Εξετάσεις περιόδου Ιανουαρίου
Μαθηματικά Α' 11.3.2004

Σειρά Α'

1. α) Έστω $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Πότε λέμε ότι το B είναι Γραμμικά Ανεξάρτητο; Γραμμικά Εξαρτημένο; Βρείτε υποσύνολα του \mathbb{R}^3 A και B έτσι ώστε το A να είναι Γρ. Ανεξάρτητο και το B Γρ. εξαρτημένο.

β) Έστω τώρα A υπόχωρος του \mathbb{R}^3 . Τι καλούμε μια βάση του A ; Τέλος, έστω ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , $A = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$. Βρείτε μια βάση του A .

2. α) Έστω σημείο $Q = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και διάνυσμα $u = (u_1, u_2, u_3)$. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L που διέρχεται από το Q και είναι παράλληλη στο u .

β) Έστω τώρα οι ευθείες $L_1: x = 2 + s, y = 1 + 2s, z = 2, s \in \mathbb{R}$ και $L_2: x = 1 - t, y = -1 + 2t, z = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι L_1 και L_2 έχουν κοινό σημείο και τέλος βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τις L_1, L_2 .

3. α) Βρείτε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}$.

β) Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$.

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int e^{2x} \eta \mu e^x dx$.

4. α) Να λύσετε την διαφορική εξίσωση $y'' + y' - 6y = 2$.

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy^2 y' - x = 1$.

5. α) Προσδιορίστε τις τιμές των α, β, γ ώστε η κατά διεύθυνση παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = \alpha xy^2 + \beta yz + \gamma z^2 x^3$ στο σημείο $P(1, 2, -1)$ να έχει μέγιστη τιμή 64, κατά την διεύθυνση που είναι παράλληλη προς τον άξονα Oz .

β) Βρείτε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, το $\frac{\partial w}{\partial v}$ για $u = 0, v = 0$, εάν $w = (x^2 + y - 2)^2 + (x - y + 2)^3, x = u - 2v + 1, y = 2u + v - 2$.

γ) Βρείτε την εξίσωση του κάθετου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ στο σημείο $P_0(1, 0, 1)$.

δ) Ελέγξτε την επιφάνεια $z = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3$ για τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σημεία καμπής.