

1. α) [10] Έστω το μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  του  $\mathbb{R}^n$ . Πότε λέμε ότι το  $B$  είναι Γραμμικά Εξαρτημένο; Έστω διανύσματα  $b_1 = (x, y, z, w)$ ,  $b_2 = (1, -1, 3, 2)$ ,  $b_3 = (0, 2, 4, 2)$  και  $b_4 = (2, 0, 10, 6)$ . Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη-συναρτήση των  $x, y, z, w$  έτσι ώστε τα  $b_1, b_2, b_3, b_4$  να είναι Γραμμικά Εξαρτημένα.

β) [10] Δώστε προσεκτικά τον ορισμό του υποχώρου του  $\mathbb{R}^n$ . Τι καλούμε βάση του  $U$ ; Έστω οι υπόχωροι  $U_1 = \{(x, y, z, w, v) \mid x - y + w = 0, y + z + 2w - v = 0\}$  και  $U_2 = \{(x, y, z, w, v) \mid 3y = 3x + 3w\}$ . Βρείτε μια βάση και τη διάσταση της ένωσης  $U = U_1 \cup U_2$ .

γ) [8] Βρείτε τη Γενική Λύση του συστήματος:

$$x + y - 3z - w = 2$$

$$2x + y + 4w = 4$$

2. [15] Υπολογίστε τα ολοκληρώματα  $\int \frac{x}{e^x} dx$  και  $\int \frac{2x^2 - 11x + 13}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

3. [10] Δώστε τον ορισμό μιας σειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Ορίστε, με απλά λόγια, τι είναι το άθροισμα της παραπάνω σειράς. Τέλος, υπολογίστε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

4. [17] α) Βρείτε μια διαφορική εξίσωση της οποίας μια λύση είναι η  $y = e^{2x} \cos 3x + e^{2x} \sin 3x$ .

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση  $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ .

5. α) [10] Να βρεθεί μια συνάρτηση  $z = f(x, y)$  η οποία να έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο  $(1, 0)$ . Δικαιολογήστε την απάντησή σας!

β) [10] Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x, y) = xy + y^2$ . Υπάρχει διεύθυνση  $\vec{v}$  έτσι ώστε η κατά διεύθυνση παράγωγος της  $f$  στο  $(3, 2)$  στην διεύθυνση  $\vec{v}$  να είναι 68;

γ) [5] Δείξτε ότι αν η  $w = f(s)$  είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του  $s$  και  $s = y + 5x$ , τότε

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5 \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

δ) [5] Βρείτε την κάθετη ευθεία στην επιφάνεια  $x + y^2 + z = 2$  στο σημείο  $(1/2, 1, 1/2)$ .