

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου
Μαθηματικά Α - 30.9.2002

Σειρά Β

1. α) Έστω επίπεδα $\Pi_1: x - 2y + z = 0$ και $\Pi_2: y - z = 1$. Βρείτε μια παραμετρική εξίσωση της ευθείας Λ που είναι η τομή των Π_1 και Π_2 .

β) Έστω διανύσματα $w = (a, b, c)$ και $v = (x_0, y_0, z_0)$. Δώστε τον ορισμό και τη γεωμετρική σημασία του εσωτερικού $w \cdot v$ και του εξωτερικού $w \times v$ γινομένου των w, v .

γ) Έστω τώρα σημεία $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 1, -1)$ και $\Gamma = (2, 0, 1)$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα A, B, Γ . Στη συνέχεια, υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου με κορυφές τα παραπάνω σημεία και την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$.

2. α) Υπολογίστε τα άοριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx, \quad \int x \eta_{\mu}(x+2) dx$$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $x = -2y^2$ και $y = x^2$.

γ) Να υπολογίσετε που συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}$$

δ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ δεν συγκλίνει.

3. α) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'' + 3y' - 4y = e^x$$

β) Η ακτίνα ενός ορθού κυλίνδρου αυξάνεται με ρυθμό 1.3 cm/min ενώ το ύψος του μειώνεται με ρυθμό 4 cm/min . Με πόσο ρυθμό αλλάζει ο όγκος του κυλίνδρου όταν η ακτίνα του είναι 70 cm και το ύψος του 140 cm ?

4. α) Βρείτε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $xz^2 - yz + \cos(xy) = 1$ στο σημείο $P(0, 0, 1)$ καθώς και το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο ίδιο σημείο.

β) Βρείτε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, το $\frac{\partial z}{\partial t}$ αν $z = x^3 + y^3 + \ln(x^2 y^2)$

και $x = t + 2s$
 $y = e^{ts}$

5. Διατυπώστε το κριτήριο $2^{\text{ης}}$ παραγώγου για συναρτήσεις 2 μεταβλητών

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία της
 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 + 15$