Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου
Μαθηματικά Α   8.9.2004

Σειρά Α

1.[18] α) Έστω διανύσματα $a = (1, 0, -1, 2)$, $b = (0, 1, 3, -1)$ και $c = (x, y, z, w)$. Πότε λέμε ότι το c είναι γραμμικός συνδυασμός των a και b; Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη-συναρτήσει των x, y, z, w- έτσι ώστε το c να είναι γραμμικός συνδυασμός των a, b.

β) Έστω τώρα A ένα μη κενό υποσύνολο του R^4. Πότε το A καλείται υπόχωρος του R^4; Τέλος, αν $U = \{(x, y, z, w) \mid z + x - 3y = 0,\ w - 2x + y = 0\}$, βρείτε μια βάση του U.

2.[18] α) Έστω $A = (x_0, y_0, z_0)$ και $u = (a, b, c)$ σημείο και διάνυσμα του R^3, αντίστοιχα. Βρείτε: (1) Παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο u, και (2) Την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το A και είναι κάθετο στο u.

β) Έστω τώρα σημεία $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 1, -1)$, $\Gamma = (2, 0, 1)$. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα A, B, Γ.

3. α) [12] Για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2y + 2y^2x$

i) Βρείτε στο σημείο $P_0(1, 3)$ τη διεύθυνση της μέγιστης αύξησης της f, καθώς και την παράγωγο της f, στη διεύθυνση της μέγιστης αύξησης της f.

ii) Την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια $z = f(x, y)$ στο σημείο (1, 3, 21)

β) [12] Αν $u = f(x, y)$ όπου $x = e^s\cos t$, $y = e^s\sin t$ δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

c) [15] Ελέγξτε την επιφάνεια $z = x^3 + 3xy + y^3$ για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σημεία καμπής.

4. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

α) [12] $y' + y\,\text{συν}x = \text{συν}x$ με $y(0) = 0$

β) [12] $y'' - 6y' + 9y = 1 + x$

γ) [8] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx, \quad \int e^x \text{ημ}x\,dx$$

δ) [5] Να βρείτε που συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^n}$