

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου
Μαθηματικά Α 8.9.2004

Σειρά Β

1. [18] α) Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= -2 \\ 2x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

Βρείτε τον πίνακα των συντελεστών A καθώς και τον επηυξημένο πίνακα B του συστήματος. Στη συνέχεια, βρείτε την τάξη των A και B και αποφανθείτε αν το σύστημα έχει λύση. Αν Ναι, βρείτε τη γενική λύση του.

β) Έστω τετραγωνικός πίνακας A . Πότε λέμε ότι ο A έχει αντίστροφο; Στη συνέχεια βρείτε την τάξη του πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει ο A αντίστροφο;

2. [18] α) Έστω διανόμενα $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Πότε λέμε ότι τα u, v, w είναι (1) Γραμμικά ανεξάρτητα, (2) Γραμμικά εξαρτημένα; Αν τα u, v, w είναι Γραμμικά ανεξάρτητα μπορεί να ισχύει η σχέση $5u - 4v + 3w = \vec{0}$;

β) Έστω τώρα u, v, w σαν παραπάνω. Ορίστε (1) το εσωτερικό γινόμενο των u, v , (2) το εξωτερικό γινόμενο των u, v καθώς και (3) το μεικτό γινόμενο των u, v, w . Ποία η Γεωμετρική σημασία των παραπάνω γινομένων;

3. α) [12] i) Βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή αύξηση της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ στο σημείο $(1, 2)$.

Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $(1, 2)$ στην κατεύθυνση προς το σημείο $(0, 1)$

ii) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $z = f(x, y)$ στο σημείο $(0, 1, 0)$

β) [12] Αν $w = f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του $u = \frac{xy}{x^2+y^2}$, δείξτε ότι

$$x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

γ) [15] Ελέγξτε την επιφάνεια $z = x^3 + y^3 - 3xy$ για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σημεία καμψής.

4. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

α) [12] $y' + 2xy = x$ με $y(0) = 1$

β) [12] $y'' + y' - 6y = x$

γ) [8] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int x^2 \eta \mu x dx$$

δ) [5] Να βρείτε που συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}$