

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 7.9.2005  
Μάθημα: Μαθηματικά Α' + Μαθηματικά Ι

Σειρά Α'

1) Να λυθούν οι Διαφορικές Εξισώσεις

$$y'' - 3y' - 10y = 2x - 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$e^{2x} dy + 2(ye^{2x} - x) dx = 0$$

2. α) Έστω η επιφάνεια με εξίσωση  $x^3z + y^2x^2 + \sin(yz) + 54 = 0$ .

Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια, στο σημείο  $P = (3, 0, -2)$  καθώς και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $P$  κάθετα στην επιφάνεια.

β) Θεωρήστε τη συνάρτηση  $\omega = xyz$ .

(1) Υπολογίστε την κατά διεύθυνση παράγωγο της  $\omega$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$  στη διεύθυνση του διανύσματος  $(2, 1, 1)$ .

(2) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της κατά διεύθυνση παραγώγου της  $\omega$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$ .

3. α) Γνωρίζοντας ότι  $z = xy^2 - y \sin x$  υπολογίστε την

$$y \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) - \frac{\partial z}{\partial x}$$

β) Ελέγξτε την επιφάνεια  $z = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$  για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και σημεία καμπής.

4. α) Δώστε τον ορισμό ενός υποχώρου  $U$  του  $\mathbb{R}^n$ . Τι καλούμε διάσταση του  $U$ ; Έστω τώρα οι υποχώροι  $U_1 = \{(x, y, z, w) \mid x + y - 2z = 0\}$  και  $U_2 = \{(x, y, z, w) \mid x - y = 0, -3x - 3y + 6z = 0\}$ . Βρείτε μια βάση και τη διάσταση της ένωσης τους.

β) Έστω σημεία  $Q = (x, y, z)$ ,  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (1, -1, 2)$ ,  $\Gamma = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη-συναρτήσεις των  $x, y, z$  έτσι ώστε το  $Q$  να ανήκει στο επίπεδο που περιέχει τα  $A, B, \Gamma$ .

5. α) Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + w = 1 \\ x + y + z - w = 0 \end{cases}$$

β) Σημειώστε το γράμμα Α ή Ψ ανάλογα με το αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος:

Σ Α. Όταν η οριζούσα ενός πίνακα είναι μηδέν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Λ Β. Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι Γραμμικά Ανεξάρτητα αν και μόνον εάν είναι παράλληλα.

Ξ Γ. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει άπειρες λύσεις.

Λ Δ. Το επίπεδο  $2x + y + 3z = 0$  και η ευθεία  $x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = -1 - 2t, t \in \mathbb{R}$ , έχουν ένα, και μόνον ένα, κοινό σημείο.

6. α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx \quad \int t e^{-t} dt$$

β) Δείξτε ότι το άθροισμα της παρακάτω σειράς υπάρχει και στη συνέχεια υπολογίστε το:  
 $0.3 + 0.33 + 0.333 + \dots$