ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝ. ΑΘΗΝΩΝ – **Φροντιστήριο Μαθηματικών**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΣΕΙΡΑ Α - 7 / 09 /06

1. α) [10] Έστω το μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ του R^n. Πότε λέμε ότι το B είναι Γραμμικά Ανεξάρτητο; Έστω διανύσματα $b_1 = (x, y, z), b_2 = (1, -1, 3)$ και $b_3 = (0, 2, 4)$. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη-συναρτήσει των x, y, z-έτσι ώστε τα b_1, b_2, b_3 να είναι Γραμμικά Ανεξάτητα.

β) [10] Δώστε προσεκτικά τον ορισμό του υποχώρου του R^n. Έστω ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z, w, v) \mid x = y, z = 2w\}$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του U.

γ) [8] Βρείτε τη Γενική Λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 5y + z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \\ 4x + 11y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

δ) [7] Βρείτε τον όγκο του στερεού Σ με κορυφές τα σημεία $A = (0,0,0), B = (1,0,2), \Gamma = (1,-1,0), \Delta = (2,2,2)$.

2. [15] Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int x \ln x \, dx$ και $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx$.

3. [10] Αποφασίστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Υπολογίστε το όριο αυτών που συγκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{3n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 7^{-n} 3^{n+1}$$

4. [12] i) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις
$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Στη συνέχεια λύστε την Δ.Ε. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$.

[8] ii) Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

5. [8] i) Αν η $f(u, v, \omega)$ είναι διαφορίσιμη και $u = x - y$, $v = y - z$, $\omega = z - x$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

[10] ii) Αν βρισκόμαστε στο σημείο P(1, -1, 1), υπάρχει κατεύθυνση $\bar{u}$ κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θερμοκρασίας $T(x, y, z) = 2xy - yz$ (η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, οι αποστάσεις σε m) να ισούται με -3^0C/m; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

[10] iii) Να βρεθούν η κάθετη ευθεία και το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $z = e^{-(x^2+y^2)}$ στο σημείο (0, 0, 1).

[10] iv) Βρείτε μία συνάρτηση $z = f(x, y)$ που να έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο (1, 0). Δικαιολογείστε την απάντησή σας.