

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2007
Μαθηματικά 20.9.2007

1. Α. [8] Δώστε προσεκτικά τον ορισμό του υποχώρου του \mathbb{R}^n . Έστω ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z, w, v) \mid x - y + w = 0, z - 3v + x = 0\}$ του \mathbb{R}^5 . Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του U .

Β. [12] Έστω πίνακας A $n \times m$. Ορίστε την τάξη του A . Έστω, τώρα B με

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Βρείτε την τάξη του B . Τέλος, έστω το σύστημα Σ :

$$\begin{aligned} x + z + 2v &= 1 \\ 3x - y + 6z + 10v &= 7 \\ 2x + 4z + 8v &= 6 \end{aligned}$$

Βρείτε τη Γενική Λύση του Σ .

Γ. [10] Έστω σημείο $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και διάνυσμα $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας Λ που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο v . Έστω τώρα η ευθεία $E : x = 1 - t, y = 2t, z = 2 - 3t, t \in \mathbb{R}$, και σημεία $B = (1, 1, 1), P = (0, 1, -1)$. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π που περιέχει τα B, P και είναι παράλληλο στην E .

2. α) [7] Αν βρισκόμαστε στο σημείο $P(1, 2)$ υπάρχει κατεύθυνση \bar{u} κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x, y) = x + 3xy + 4y^2$ να ισούται με 25; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) [9] Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $3x - y + 3z = 1$.

γ) [7] Αν $w = \ln(x^2 + 2xy + 2z)$, $x = r + s, y = r - s, z = 2rs$, βρείτε τα $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$ βάσει του κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσης.

δ) [7] Βρείτε τα τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$.

3. α) [5] Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n + \ln n}{n^2}$$

β) [5] Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n}$$

γ) [10] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 xe^x dx, \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

4. α) [10] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

β) [10] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + y = f(x)$, όπου $f(x)$ δεδομένη συνάρτηση, αν είναι γνωστό ότι έχει ως μερική λύση την συνάρτηση $y = (1 + \eta\mu x)e^{-x}$