

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου
Μαθηματικά Β – Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών 22.6.2004

4. α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$.

(Υπόδειξη: αντιστρέψτε την σειρά ολοκλήρωσης).

β) Βρείτε τον όγκο στο 1^0 ογδοημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα
 $2x + 2y - z + 1 = 0, y = x, x = 2$.

2. α) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{n+2} - y_n = 1$$

όταν $y_1 = y_2 = 1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{n+2} + y_n = n$$

όταν $y_1 = y_2 = 0$.

3. α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, βρείτε το εμβαδόν που περικλείει η ελλειψη

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

όπου a, b θετικές σταθερές.

β) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $F = -4xy\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ καθώς το σημείο εφαρμογής της κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2, z = 1$ από το $A(0, 0, 1)$ έως το $B(2, 4, 1)$.

4. α) Εξετάστε αν η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = z|z|, z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική.

β) Γράψτε τους ολοκληρωτικούς τύπους του Cauchy και χρησιμοποιείστε τους για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+1)} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{5z^2 - 3z + 8}{(z-1)^3}$$

όπου $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$.