ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
10.9.2001

1.α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin x}{x}dxdy$

(Υπόδειξη: αντιστρέψτε την σειρά ολοκλήρωσης)

β) Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, εκφράστε με ένα τριπλό ολοκλήρωμα τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2=4x$, πάνω από το επίπεδο $z=0$ και κάτω από την επιφάνεια $x^2+y^2=4z$. 6y39

γ) Μετατρέψτε το παραπάνω ολοκλήρωμα σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. 6y39

2.α) Για τον πληθυσμό y_n το έτος n , ενός είδους ζώου που κινδυνεύει να εξαφανιστεί από ένα νησί, ισχύει η εξίσωση

$$y_n - \alpha y_{n-1} = \beta,$$ 6y22

όπου $0<\alpha<1$, y_{n-1} ο πληθυσμός το έτος n-1, και β ο αριθμός των ζώων που μεταφέρονται κάθε έτος στο νησί προκειμένου να ενισχύσουν τον πληθυσμό τους. Να λυθεί η εξίσωση και να βρεθεί ο οριακός πληθυσμός $\lim_{n\to+\infty} y_n$ όταν το n τείνει στο άπειρο.

β) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{n+1} - 2y_{n-1} = n$$ 6y22

όπου n = 1, 2, 3,....

3.α) Να βρεθεί η γενική λύση u(x,y) της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2y^2$$ 6y24 , 23

και η μερική λύση που πληροί τις συνθήκες $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=y^3$ και $u(0,y)=-1$.

β) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_{\widehat{AB}} \vec{\delta}d\vec{r}$ της διανυσματικής συναρτήσεως 6y46

$$\vec{\delta} = 2x\vec{i} + 2z\vec{j} - y\vec{k}$$

κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ που έχει άκρα τα A(0,0,0), B(1,1,1) και που ανήκει

i) στην καμπύλη $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$ u=0 u=1

ii) στην ευθεία που περνάει από τα σημεία A και B.

4.α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (χωρίς χρήση των ολοκληρωτικών τύπων του Cauchy)

$$\int_c \frac{dz}{(z-1)^n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

όπου C ο κύκλος ακτίνας 1 και κέντρου $z=1$.

β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(z)=z|z|^2$ είναι αναλυτική.

γ)Υπολογίστε το $\int_c \frac{z^2 - z + 1}{(z-2)^3}$

όπου C απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει το z=2.

$|A-\lambda I| = 0$

$f(\lambda) = |A-\lambda I|$

5.α) Έστω A πίνακας nxn. Δώστε τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A. Επίσης, δώστε τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A.

β) O A καλείται αυτοδύναμος αν $A^2 = A$. Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή ενός αυτοδύναμου πίνακα είναι 1 ή 0. Δώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη συναρτήσει της τάξης του πίνακα, έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές ενός αυτοδύναμου πίνακα nxn να είναι 1.

6.α) Σημειώστε στα παρακάτω Αλήθεια (A) ή Ψέμα (Ψ):

i) O A είναι αντιστρέψιμος όταν και μόνο όταν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A.

ii) Αν p(t) είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^2 είναι $q(t)=p^2(t)$.

iii) Δύο όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια μορφή Jordan.

iv) Ένας πίνακας A όμοιος με τον $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, θα πρέπει να είναι ίσος με τον B.

v) Κάθε πίνακας A είναι όμοιος με τον αντίστροφό του. (A)

β) Βρείτε την κανονική μορφή Jordan των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι φοιτητές του τμήματος Φυσικών Πόρων & Γ. Μηχανικής θα γράψουν τα θέματα 1,2,3,4.

Οι φοιτητές του τμήματος Γ. Οικονομίας θα γράψουν τα θέματα 1,2,5,6.