

Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής

1^η Πρόοδος στο Μάθημα Στατιστική

13/12/07

Α΄ ΣΕΙΡΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

1^ο Θέμα

α) Περιγράψτε τη σχέση Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής.

β) Αν A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$P(A)$	$P(B)$	Συνθήκη για τα A και B	$P(AB)$	$P(A \cup B)$	$P(A/B)$
0.3	0.4	Ξένα			
0.3	0.4	Ανεξάρτητα			
0.1	0.5				0.1
0.2	0.5		0		

(15 Μονάδες)

2^ο Θέμα

α) i. Πόσες διαφορετικές δενδροστοιχίες αποτελούμενες από 5 όμοιες λεύκες (Λ), 3 όμοια πλατάνια (Π) και 2 όμοιους ευκαλύπτους (E) μπορούν να δημιουργηθούν; ii. Ας υποθέσουμε ότι όλες οι δενδροστοιχίες μπορούν να δημιουργηθούν με την ίδια πιθανότητα. Ποια είναι η πιθανότητα να δημιουργηθεί μια δενδροστοιχία στην οποία τα όμοια δένδρα να είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο; (π.χ. ΠΠΠΛΛΛΛΛΕΕ ή ΛΛΛΛΛΕΕΠΠΠ κ.τλ.).

(10 Μονάδες)

β) Το 40% του πληθυσμού μιας χώρας είναι καπνιστές. Από μια ασθένεια των πνευμόνων πάσχει το 70% των καπνιστών και το 20% των μη καπνιστών. i) Ποιο ποσοστό του πληθυσμού πάσχει από ασθένεια των πνευμόνων ii) Το κάπνισμα και η ασθένεια των πνευμόνων είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα ενδεχόμενα; iii) Αν ένα άτομο από τον πληθυσμό πάσχει από ασθένεια των πνευμόνων, ποια είναι η πιθανότητα να είναι καπνιστής. Ερμηνεύστε την πιθανότητα αυτή ως ποσοστό.

(20 Μονάδες)

γ) Έστω $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ μια διαμέριση ενός δειγματοχώρου Ω με $P(B_i) > 0$ (για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$). Είναι γνωστό ότι για κάθε ενδεχόμενο A του Ω με $P(A) > 0$, ο τύπος του Bayes μας δίνει τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(B_i / A)$. Τι πρακτική αξία έχουν αυτές οι πιθανότητες;

(5 Μονάδες)

3^ο Θέμα

α) Η διάρκεια δανεισμού ενός βιβλίου από τη βιβλιοθήκη του ΓΠΑ (σε ημέρες) είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου c . Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη διάρκεια δανεισμού; Επίσης να βρεθούν i) η μέση διάρκεια δανεισμού ii) η πιθανότητα ένα βιβλίο να επιστραφεί μεταξύ δύο και τριών ημερών και iii) η πιθανότητα ένα βιβλίο να επιστραφεί ακριβώς σε 3 ημέρες.

(15 Μονάδες)

β) Σε μια μεγάλη κτηνοτροφική μονάδα έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός X_t των θανάτων ζώων της μονάδας από μια σπάνια ασθένεια σε χρόνο t μηνών, περιγράφεται ικανοποιητικά από μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Αν ο μέσος αριθμός θανάτων είναι 3 ζώα το μήνα να υπολογισθούν οι πιθανότητες: i) να συμβούν το πολύ 2 θάνατοι από αυτή την ασθένεια σε ένα μήνα ii) να συμβούν το πολύ 4 θάνατοι από αυτή την ασθένεια σε χρονικό διάστημα 2 μηνών και iii) στο επόμενο τρίμηνο να υπάρξουν τουλάχιστον 2 μήνες με το πολύ 2 θανάτους ο καθένας από αυτή την ασθένεια.

(20 Μονάδες)

4^ο Θέμα

Έχει διαπιστωθεί ότι από τα οπωροφόρα δένδρα μιας μεγάλης περιοχής, ποσοστό 2% προσβάλλεται κάθε χρόνο από μια συγκεκριμένη ασθένεια. Ένας γεωπόνος εξετάζει ένα τυχαίο δείγμα 300 δένδρων από την περιοχή. Αν X είναι ο αριθμός των δένδρων (από τα 300) που έχουν προσβληθεί από την ασθένεια α) ποια είναι η ακριβής κατανομή της X ; β) πόσα δένδρα από τα 300 αναμένεται να έχουν προσβληθεί; γ) χρησιμοποιώντας για την προσέγγιση της κατανομής της X κατάλληλη συνεχή κατανομή, να βρεθεί η πιθανότητα να έχουν προσβληθεί i) από τρία μέχρι οκτώ δένδρα ii) τουλάχιστον 15 δένδρα.

(25 Μονάδες)

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά.

Ευχόμαστε επιτυχία!

Δίνονται οι παρακάτω τιμές της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής:

$\Phi(0.75)=0.7734$, $\Phi(0.78)=0.7823$, $\Phi(0.8)=0.7881$, $\Phi(0.83)=0.7967$, $\Phi(0.85)=0.8023$,
 $\Phi(1.24)=0.8925$, $\Phi(1.25)=0.8944$, $\Phi(1.5)=0.9332$, $\Phi(3.59)=0.9998$.

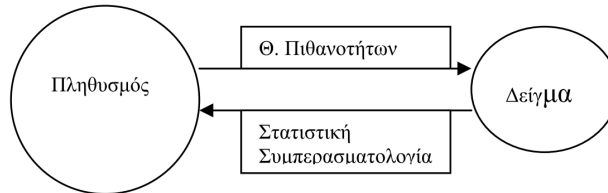
Επίσης, δίνονται οι τιμές:

$e^{-10} \approx 0.000045$, $e^{-6} \approx 0.0025$, $e^{-3} \approx 0.0498$, $e^{-2.5} \approx 0.0821$, $e^{-2} \approx 0.135$, $e^{-1.5} \approx 0.223$

Ενδεικτικές απαντήσεις (Α΄ Σειρά)

1^ο Θέμα

α) Κάθε μοντέλο που υποθέτουμε για τον πληθυσμό συνεπάγεται σύμφωνα με τη Θεωρία Πιθανοτήτων ορισμένη συμπεριφορά για το δείγμα. Δηλαδή, η Θεωρία Πιθανοτήτων μας λέει τι πρέπει να περιμένουμε στο δείγμα. Η Στατιστική μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν η συμπεριφορά του δείγματος διαφέρει σημαντικά από το αναμενόμενο με βάση τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Αν αυτή η διαφορά μεταξύ αναμενόμενου από τη θεωρία και παρατηρούμενου στο δείγμα είναι σημαντική τότε πρέπει να αναζητηθεί άλλο μοντέλο για την περιγραφή του πληθυσμού.



β)

$P(A)$	$P(B)$	Συνθήκη για τα A και B	$P(AB)$	$P(A \cup B)$	$P(A/B)$
0.3	0.4	Ξένα	0	0.7	0
0.3	0.4	Ανεξάρτητα	0.12	0.58	0.3
0.1	0.5	Ανεξάρτητα	0.05	0.55	0.1
0.2	0.5	Ξένα	0	0.7	0

2^ο Θέμα

α) i. $\frac{10!}{5!3!2!}$, ii. $\frac{3!5!3!2!}{10!}$

β) Έστω Π το ενδεχόμενο: ένα άτομο πάσχει από την ασθένεια και Κ το ενδεχόμενο: ένα άτομο είναι καπνιστής

Δίνονται οι πιθανότητες:

$$P(K) = 0.4, P(\Pi / K) = 0.7, P(\Pi / K') = 0.2.$$

i) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Pi) = P(\Pi / K)P(K) + P(\Pi / K')P(K') = 0.4.$$

Άρα από ασθένεια των πνευμόνων πάσχει το 40% του πληθυσμού.

ii) $P(\Pi / K) = 0.7 \neq P(\Pi) = 0.4$ άρα εξαρτημένα

iii) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(K / \Pi)$. Από τον τύπο του Bayes έχουμε

$$P(K / \Pi) = \frac{P(\Pi / K)P(K)}{P(\Pi)} = 0.7. \text{ Άρα, από τα άτομα του πληθυσμού που πάσχουν,}$$

το 70% είναι καπνιστές.

γ) Οι πιθανότητες $P(B_i / A)$ έχουν πρακτική αξία όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα A και θέλουμε να διατυπώσουμε λογικά συμπεράσματα για την αιτία B_i που το προκάλεσε.

3^ο Θέμα

α) Πρέπει $\int_0^5 c \cdot x dx = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow c = 0.08$. Η μέγιστη επιτρεπόμενη διάρκεια δανεισμού

είναι προφανώς 5 ημέρες. i) $E(X) = \int_0^5 x \cdot 0.08x dx = \dots = 3.33$ ημέρες

ii) $P(2 < X < 3) = \int_2^3 0.08x dx = \dots = 0.2$ iii) Η μεταβλητή είναι συνεχής και επομένως

$$P(X = 3) = 0.$$

β) Ισχύει $P(X_t = x) = e^{-3t} \frac{(3 \cdot t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{i) } P(X_1 \leq 2) &= P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) = \\ &= e^{-3} \frac{3^0}{0!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \frac{3^2}{2!} = \frac{17}{2} e^{-3} = 0.4233 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } P(X_2 \leq 4) &= P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) + P(X_2 = 3) + P(X_2 = 4) = \\ &= e^{-6} \frac{6^0}{0!} + e^{-6} \frac{6^1}{1!} + e^{-6} \frac{6^2}{2!} + e^{-6} \frac{6^3}{3!} + e^{-6} \frac{6^4}{4!} = 115e^{-6} \end{aligned}$$

iii) Έστω Y ο αριθμός των μηνών (από τους τρεις) με 2 το πολύ θανάτους ο καθένας. Προφανώς $Y \sim B(3, 0.4233)$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(Y \geq 2) = \binom{3}{2} \cdot (0.4233)^2 \cdot (0.5767)^1 + \binom{3}{3} \cdot (0.4233)^3 = 0.3857$$

4^ο Θέμα

α) Επειδή το δείγμα είναι μικρό σε σχέση με το μέγεθος της καλλιέργειας, $X \sim B(300, 0.02)$ β) $E(X) = 300 \cdot 0.02 = 6$ δένδρα γ) Επειδή το $n=300$ είναι αρκετά μεγάλο με $n \cdot p \geq 5$ και $n \cdot q \geq 5$, η διωνυμική κατανομή $B(300, 0.02)$ μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $N(6, 2.42^2)$ και επομένως για τον υπολογισμό των ζητούμενων πιθανοτήτων έχουμε:

$$\text{i) } P(3 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{3-6}{2.42} \leq Z \leq \frac{8-6}{2.42}\right) = \Phi(0.83) - \Phi(-1.24) = 0.69$$

$$\text{ii) } P(X \geq 15) = P\left(Z \geq \frac{15-6}{2.42}\right) = P(Z \geq 3.72) = 1 - \Phi(3.72) \approx 0.$$

Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής

1^η Πρόοδος στο Μάθημα Στατιστική

13/12/07

Β' ΣΕΙΡΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

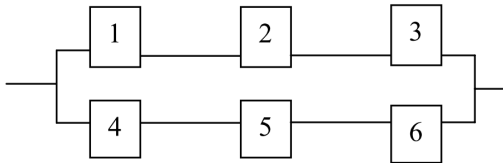
1^ο Θέμα

- α) Τι είναι i) τα δειγματοληπτικά σφάλματα ii) οι μεροληψίες.
β) Το πλήθος των διατάξεων n διαφορετικών στοιχείων ανά 3 είναι 60. Πόσοι είναι οι συνδυασμοί αυτών των n στοιχείων ανά 3;

(15 Μονάδες)

2^ο Θέμα

- α) Οι 6 μονάδες του παρακάτω συστήματος λειτουργούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη και η κάθε μια έχει αξιοπιστία (πιθανότητα λειτουργίας) ίση με p ($0 < p < 1$). Το σύστημα λειτουργεί αν λειτουργούν και οι τρεις μονάδες 1, 2, 3 ή αν λειτουργούν και οι τρεις μονάδες 4, 5, 6.



- Να δείξετε ότι η αξιοπιστία του συστήματος (η πιθανότητα λειτουργίας του) είναι $R = p^3 \cdot (2 - p^3)$.

(10 Μονάδες)

- β) Το 1% ενός πληθυσμού έχει προσβληθεί από μια ασθένεια. Η εξέταση που εφαρμόζεται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει σωστή διάγνωση στο 95% των περιπτώσεων όταν το εξεταζόμενο άτομο πάσχει από την ασθένεια, και στο 98% των περιπτώσεων όταν δεν πάσχει από την ασθένεια. Επιλέγεται ένα άτομο από τον πληθυσμό αυτό στην τύχη και υποβάλλεται στην εξέταση. i) Ποια είναι η πιθανότητα η εξέταση να βγει θετική, δηλαδή να δείξει ότι το άτομο πάσχει από την ασθένεια ii) Ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι το άτομο από την ασθένεια αν η εξέταση ήταν θετική iii) Ποια είναι η πιθανότητα να μην πάσχει από την ασθένεια το άτομο αν η εξέταση ήταν θετική iv) Σχολιάστε την πιθανότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα (ii) σε σχέση με την ακρίβεια της εξέτασης.

(20 Μονάδες)

3^ο Θέμα

- α) Ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου (σε ώρες) είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(8-x)}{32} & 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου θ . Ποιος είναι ο μέγιστος χρόνος που μπορεί να απαιτηθεί για την απορρόφηση του φαρμάκου; Επίσης να βρεθούν i) ο μέσος χρόνος απορρόφησης του φαρμάκου ii) η πιθανότητα να απορροφηθεί το φάρμακο εντός 6 ωρών και iii) η πιθανότητα να απορροφηθεί το φάρμακο ακριβώς σε 6 ώρες.

(15 Μονάδες)

β) Μπορεί η συνάρτηση πυκνότητας f μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1; Αντίστοιχα, η συνάρτηση πιθανότητας f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1; (εξηγήστε γιατί).

(5 Μονάδες)

γ) Από παρατηρήσεις πολλών ετών, έχει επαληθευθεί ότι ο αριθμός X_t των σεισμών μεγέθους μεγαλύτερου των 6.5 Richter που πλήττουν μια σεισμογενή περιοχή σε χρόνο t , περιγράφεται ικανοποιητικά από μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Αν ο ρυθμός εμφάνισής τους είναι 3 ανά έτος, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξουν τουλάχιστον δύο σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 6.5 Richter i. σε ένα χρονικό διάστημα ενός έτους ii. σε ένα χρονικό διάστημα έξι μηνών iii) σε καθένα από τρία διαφορετικά έτη.

(20 Μονάδες)

4^ο Θέμα

Ένας φρουτοπαραγωγός συσκευάζει τα φρούτα που παράγει σε κιβώτια των 500 φρούτων και τα προωθεί στην αγορά. Έχει διαπιστωθεί ότι αν τα φρούτα φθάσουν στον καταναλωτή μετά μια εβδομάδα από την ημέρα συγκομιδής θα έχει σαπίσει ένα ποσοστό 20%. Ένας μανάβης ανοίγει ένα κιβώτιο φρούτων αυτού του παραγωγού μια εβδομάδα μετά τη συγκομιδή και ελέγχει τυχαία 100 φρούτα (με επανάθεση). Αν X είναι ο αριθμός των φρούτων που έχουν σαπίσει (στα 100 που ελέγχει ο μανάβης), α) ποια είναι η ακριβής κατανομή της X ; β) πόσα φρούτα από τα 100 αναμένεται να έχουν σαπίσει; γ) χρησιμοποιώντας για την προσέγγιση της κατανομής της X κατάλληλη συνεχή κατανομή, να βρεθεί η πιθανότητα να έχουν σαπίσει i) από 15 μέχρι 23 φρούτα ii) τουλάχιστον 26 φρούτα.

(25 Μονάδες)

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά.
Ευχόμαστε επιτυχία!

Δίνονται οι παρακάτω τιμές της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής:

$\Phi(0.75)=0.7734$, $\Phi(0.78)=0.7823$, $\Phi(0.8)=0.7881$, $\Phi(0.83)=0.7967$, $\Phi(0.85)=0.8023$,
 $\Phi(1.24)=0.8925$, $\Phi(1.25)=0.8944$, $\Phi(1.5)=0.9332$, $\Phi(3.59)=0.9998$.

Επίσης, δίνονται οι τιμές:

$e^{-10} \approx 0.000045$, $e^{-6} \approx 0.0025$, $e^{-3} \approx 0.0498$, $e^{-2.5} \approx 0.0821$, $e^{-2} \approx 0.135$, $e^{-1.5} \approx 0.223$

Ενδεικτικές απαντήσεις (Β' Σειρά)

1^ο Θέμα

α) i. αναπόφευκτα σφάλματα που συνδέονται με τη μεταβλητότητα του δείγματος, με το μέγεθος του δείγματος και με την επιλογή σχεδίου δειγματοληψίας ii. συστηματικά

σφάλματα προς την ίδια κατεύθυνση. β) $3! \binom{v}{3} = \Delta_3^v \Rightarrow \binom{v}{3} = \frac{60}{6} = 10$

2^ο Θέμα

α) Έστω $A_i, i = 1, 2, \dots, 6$ τα ενδεχόμενα: η μονάδα i του συστήματος λειτουργεί.

Προφανώς ισχύει:

$$R = P(A_1 A_2 A_3 \cup A_4 A_5 A_6) = P(A_1 A_2 A_3) + P(A_4 A_5 A_6) - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) = \\ = p^3 + p^3 - p^6 = 2p^3 - p^6 = p^3(2 - p^3)$$

β) Έστω Π το ενδεχόμενο: ένα άτομο έχει προσβληθεί από την ασθένεια και Θ το ενδεχόμενο: η εξέταση είναι θετική.

Δίνονται οι πιθανότητες: $P(\Pi) = 0.01, P(\Theta/\Pi) = 0.95, P(\Theta'/\Pi') = 0.98.$

i) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Theta) = P(\Theta/\Pi)P(\Pi) + P(\Theta/\Pi')P(\Pi') = 0.95 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0293$$

ii) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(\Pi/\Theta)$. Από τον τύπο του Bayes έχουμε

$$P(\Pi/\Theta) = \frac{P(\Theta/\Pi)P(\Pi)}{P(\Theta)} = \frac{0.0095}{0.0293} = 0.324. \text{ Άρα από τα άτομα των οποίων η}$$

εξέταση ήταν θετική, έχει προσβληθεί από την ασθένεια ποσοστό 32.4%.

iii) Ζητείται η πιθανότητα $P(\Pi'/\Theta) = 1 - P(\Pi/\Theta) = 0.676$

iv) Η εξέταση παρότι έχει υψηλή ακρίβεια (ποσοστά σωστής διάγνωσης 95% και 98%) εντούτοις η πιθανότητα να πάσχει ένα άτομο ενώ η εξέταση ήταν θετική είναι μικρή (32.4%). Η εξήγηση βρίσκεται στο ότι η ασθένεια είναι σπάνια (1% έχει προσβληθεί). Η χρησιμότητα και η ισχύς της εξέτασης μπορεί να εκτιμηθεί καλύτερα αν παρατηρήσουμε ότι μετά το αποτέλεσμα της εξέτασης (θετική διάγνωση), η εκ των προτέρων πιθανότητα πάθησης (1%), έχει πολλαπλασιασθεί 32 φορές περίπου, έστω και αν παραμένει μικρή.

3^ο Θέμα

α) Πρέπει $\int_0^{\theta} \frac{8-x}{32} dx = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \theta = 8$. Ο μέγιστος χρόνος απορρόφησης που μπορεί

να απαιτηθεί είναι προφανώς 8 ώρες i) $E(X) = \int_0^8 x \cdot \frac{8-x}{32} dx = \dots = \frac{8}{3}$ ώρες.

ii) $P(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 \frac{8-x}{32} dx = \dots = \frac{15}{16}$ iii) Η μεταβλητή είναι συνεχής και επομένως

$$P(X = 6) = 0.$$

β) Η συνάρτηση πυκνότητας f μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1 διότι δεν εκφράζει πιθανότητα αλλά πυκνότητα. Δηλαδή, όσο πιο μεγάλη είναι μια τιμή $f(\alpha)$ της f τόσο πιο πιθανό είναι να πάρει η X τιμές κοντά στο α . Αντίθετα η συνάρτηση πιθανότητας f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δεν μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1 διότι εκφράζει πιθανότητα ($f(x_i) = P(X = x_i)$).

γ) Ισχύει $P(X_t = x) = e^{-3t} \frac{(3 \cdot t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

$$i) P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X_1 < 2) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) = \\ = 1 - e^{-3} \frac{3^0}{0!} - e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 1 - 4e^{-3}$$

$$ii) P(X_{1/2} \geq 2) = 1 - P(X_{1/2} < 2) = 1 - P(X_{1/2} = 0) - P(X_{1/2} = 1) = \\ = 1 - e^{-3/2} \frac{(3/2)^0}{0!} - e^{-3/2} \frac{(3/2)^1}{1!} = 1 - \frac{5}{2} e^{-3/2}$$

iii) Έστω Y ο αριθμός ετών (από τα τρία) σε καθένα από τα οποία συμβαίνουν τουλάχιστον δύο σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 6.5 Richter. Προφανώς $Y \sim B(3, 1 - 4e^{-3})$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \cdot (1 - 4e^{-3})^3 \cdot (4e^{-3})^0 = (1 - 4e^{-3})^3.$$

4^ο Θέμα

α) Προφανώς $X \sim B(100, 0.2)$ β) $E(X) = 100 \cdot 0.2 = 20$ φρούτα γ) Επειδή το $n=100$ είναι αρκετά μεγάλο με $n \cdot p \geq 5$ και $n \cdot q \geq 5$, η διωνυμική κατανομή $B(100, 0.2)$ μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $N(20, 4^2)$ και επομένως για τον υπολογισμό των ζητούμενων πιθανοτήτων έχουμε:

$$i) P(15 \leq X \leq 23) = P\left(\frac{15 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{23 - 20}{4}\right) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.25) = 0.6678$$

$$ii) P(X \geq 26) = P\left(Z \geq \frac{26 - 20}{4}\right) = P(Z \geq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$