Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

(1) [ΜΟΝ. 2,5] Ας είναι (E_0) μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης ($n>1$). Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν n λύσεις της (E_0) είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η ορίζουσα Wronski αυτών δεν μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα ορισμού των.

(ii) Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της (E_0).

(iii) Αν $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), τότε για κάθε λύση y της (E_0) υπάρχουν n μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ έτσι ώστε $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$.

(2) [ΜΟΝ. 2] Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E) \qquad y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ένα $x_0 \geqq 0$ και μία σταθερά $\mu>0$ έτσι ώστε $p(x) \geqq \mu$ για όλα τα $x \geqq x_0$ και ότι $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

(3) [ΜΟΝ. 1] Ας είναι $\{y_1, y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το $(-\infty,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της y_2.

(4) [ΜΟΝ. 2] Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $bk \neq ak^2+c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = e^{-kx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

τείνουν στο μηδέν για $x \to \infty$.

(5) [ΜΟΝ. 2,5] Να επιλυθεί η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

στο διάστημα $(-1,1)$, όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ