Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2001

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

1 [ΜΟΝ. 1,5]

(i) Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I. Ας είναι $x_0 \in I$ και y_0 μία σταθερά. Να βρεθεί ο τύπος, ο οποίος δίνει τη μοναδική λύση y της (Ε) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

(ii) Έστω η διαφορική εξίσωση Bernoulli

(Ε) $$y' + py = qy^{\lambda},$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $\lambda \neq 0$ είναι ένας άρτιος ακέραιος. Ας είναι $x_0 \in I$ και $y_0 \neq 0$ μία σταθερά. Να βρεθεί ο τύπος, ο οποίος δίνει τη μοναδική λύση y (ορισμένη σε μία περιοχή του x_0) της (Ε) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

(iii) Να αναπτυχθεί η μέθοδος για την εύρεση των λύσεων μίας διαφορικής εξίσωσης Riccati της οποίας είναι γνωστή μία (μερική) λύση.

2 [ΜΟΝ. 1,5] Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

της μορφής $x=t+\alpha$, $y=z+\beta$ (όπου α και β είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+y-3}{x+2y-3}$$

③ [ΜΟΝ. 2] Έστω η τρίτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0,$$

όπου a_0, a_1, a_2 και a_3 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και $a_3(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0) τέτοιες ώστε

$$y_1(x)\neq 0 \text{ και } (y_2/y_1)'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in I.$$

Να επιλυθεί η (E_0) με αναγωγή αυτής σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.

④ [ΜΟΝ. 1.5] Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{7} y^{(k)}=0.$$

(i) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της $(*)$.

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*) που τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$ είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση αυτού.

(5) [ΜΟΝ. 1,5] Να προσδιορισθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $L > 1$, έτσι ώστε η δευτέρης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + y = 0, \quad 1 \leqq x \leqq L$$

να έχει μη μηδενικές λύσεις y που να πληρούν τις συνοριακές συνθήκες $y(1) = y(L) = 0$.

(6) [ΜΟΝ. 2] Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ze^{-x^2/4}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) y = 0.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με τον μετασχηματισμό $y = ze^{-x^2/4}$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ