Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

① [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2y^3-3xy)\,dx+(x^2+xy^2)\,dy=0,$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x,y)=\frac{1}{y}\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να βρεθεί).

② [ΜΟΝ. 1] Ας είναι p και q συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοιες ώστε

$$|p(x)| \geqq |q(x)| \text{ για όλα τα } x \geqq 0$$

και ας θεωρήσουμε τις πρώτης τάξης ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

(P) $\qquad y'+py=0$

και

(Q) $\qquad z'+qz=0.$

Να εξετασθεί αν είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση: Αν όλες οι λύσεις της (Q) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$, τότε όλες οι λύσεις της (P) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$.

③ [ΜΟΝ. 2] Ας είναι b και c πραγματικές σταθερές και έστω y μία λύση της δεύτερης τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 2by' + cy = 0$$

τέτοια ώστε $y(0) = y(1) = 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$y(n) = 0 \text{ για κάθε ακέραιον } n.$$

④ [ΜΟΝ. 2,5] Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $bk \neq ak^2 + c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = xe^{-kx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

⑤ [ΜΟΝ. 2] Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x(2-x)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0; \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 3.$$

⑥ [ΜΟΝ. 1] Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (E_0) $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, όπου a_2, a_1, a_0 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $a_2 \neq 0$. Ας είναι $x_0 \in I$. Πότε το x_0 καλείται ομαλό, ανώμαλο, κανονικό ανώμαλο σημείο της (E_0); Αν x_0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της (E_0), να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων δυναμοσειρών-λύσεων της (E_0) γύρω από το σημείο x_0.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ