Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1999

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

1 [ΜΟΝ. 1,5]

(i) Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I. Ας είναι $x_0 \in I$ και y_0 μία σταθερά. Να βρεθεί ο τύπος, ο οποίος δίνει τη μοναδική λύση y της (E) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

(ii) Έστω η διαφορική εξίσωση Bernoulli

(E) $$y' + py = qy^{\lambda},$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $\lambda \neq 0$ είναι ένας άρτιος ακέραιος. Ας είναι $x_0 \in I$ και $y_0 \neq 0$ μία σταθερά. Να βρεθεί ο τύπος, ο οποίος δίνει τη μοναδική λύση y (ορισμένη σε μία περιοχή του x_0) της (E) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

(iii) Να αναπτυχθεί η μέθοδος για την εύρεση των λύσεων μίας διαφορικής εξίσωσης Riccati της οποίας είναι γνωστή μία (μερική) λύση.

2 [ΜΟΝ. 1,5] Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης

$$(E_0) \qquad \alpha_3 y''' + \alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0,$$

όπου α_i $(i=0,1,2,3)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και $\alpha_3(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Ας είναι y_1 μία λύση της (E_0) με $y_1(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Να αποδειχθεί ότι για $y = u y_1$ και $v = u'$ η (E_0) μετασχηματίζεται σε μία δεύτερης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση $(E_0)^*$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι, αν $\{v_1, v_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της $(E_0)^*$ και

$$y_k(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_{k-1}(t)\,dt, \; x \in I \quad (k=2,3),$$

όπου x_0 είναι ένα σημείο του I, τότε $\{y_1, y_2, y_3\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

3) [MON. 2] Ας είναι b μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ για την οποία υπάρχει μία σταθερά $C \geqq 0$ έτσι ώστε

$$\int_{x}^{x+1} |b(t)|\,dt \leqq C \text{ για όλα τα } x \geqq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$e^{-x} \int_0^x e^t |b(t)|\,dt \leqq C \frac{e}{e-1} \text{ για } x \geqq 0.$$

Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$y'' + 2y' + 2y = b$$

είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

(4) [ΜΟΝ. 1,5] Να προσδιορισθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $L>1$, έτσι ώστε η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + y = 0, \quad 1 \leq x \leq L$$

να έχει μη μηδενικές λύσεις y που να πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$y(1) = y(L) = 0.$$

(5) [ΜΟΝ. 1] Να αποδειχθεί ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = -3x - y \; ; \quad x(0) = y(0) = \frac{1}{2}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 2.$$

(6) [ΜΟΝ. 2,5] Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + p(p+1) y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>