Εξετάσεις στο μάθημα **«ΑΝΑΛΥΣΗ Ι»**
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών (Ιανουάριος 2006)

Θέμα 1º Έστω $(a_n)_{n\in /N}$ ακολουθία με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 5$. Προσδιορίστε (αν είναι εφικτό) το πλήθος των στοιχείων των κάτωθι συνόλων:

i) $A_1 = \{n \in /N : a_n < 5.001\}$, ii) $A_2 = \{n \in /N : a_n > 5.001\}$,
iii) $A_3 = \{n \in /N : 4.98 < a_n < 5{,}1\}$, iv) $A_4 = \{n \in /N : a_n < 5\}$.

Θέμα 2º Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 3º Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ell n(n),\ n \geq 1$ είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 4º (i) Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \tau o\xi\varepsilon\phi\, x,\ x \in /R$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\tau o\xi\varepsilon\phi\, x}{x} < 1$ για κάθε $x \in /R \setminus \{0\}$.

Θέμα 5º (i) Έστω $f : I \to /R$ κυρτή, παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα I. Αποδείξτε ότι $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$ για κάθε $x, y \in I$.

(ii) Έστω $f : (0,+\infty) \to /R$ κυρτή, παραγωγίσιμη, φθίνουσα και κάτω φραγμένη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)x = 0$.

Θέμα 6º Έστω $f : [\alpha,\beta] \to /R$ κυρτή, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\rho \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\rho) = 0$ και ότι η ακολουθία με $x_0 \in (\rho,\beta],\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \in /N$, συγκλίνει στον ρ.

Θέμα 7º Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int e^{-x}\eta\mu(2x)dx$, ii) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$, iii) $\int_0^1 x\ell n(x)dx$.

Θέμα 8º (i) Αποδείξτε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^2$

(ii) Να ευρεθεί η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to [0+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq \int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Θέμα 9º Αποδείξτε ότι $\ell n(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ για κάθε $x \in (-1,+1]$.

Θέμα 10º Έστω $f : [\alpha,\beta] \to /R$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{|f''(\xi)|}{4}(\beta-\alpha)^2$.

- Να απαντήσετε σε 8 (οκτώ) θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
- Μαζί με το γραπτό σας παραδίδετε και τα θέματα.

Ονοματεπώνυμο:………………………………
………………………………………………
Α.Μ.: ………………………………

Καλή επιτυχία!

<u>Απαντήσεις</u>

Κάθε άλλη απάντηση στα θέματα είναι δεκτή, εφ' όσον είναι τεκμηριωμένη.

Οι απαντήσεις των **θεμάτων 1, 2, 3, 4i, 5i, 6, 7, 8i και 9** υπάρχουν στην η-τάξη ή στο διανεμηθέν σύγγραμμα ή στις παραδόσεις του μαθήματος (το "ή" δεν είναι αποκλειστικό).

<u>Απαντήσεις υπολοίπων θεμάτων</u>

Θ4 ii) Έχουμε $f(x)=\dfrac{\tau o\xi\varepsilon\phi\, x}{x}=\dfrac{\tau o\xi\varepsilon\phi\,(-x)}{(-x)}=f(-x),\ x\in /R\setminus\{0\}$ οπότε αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $x>0$. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτής της άσκησης 8.1 (η-τάξη).

Θ5 ii) Η f είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα υπάρχει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in /R$ (*)
Η f είναι κυρτή, παραγωγίσιμη συνάρτηση οπότε (από το i) έχουμε $f(y)\geq f(2y)+f'(2y)(-y)$ για κάθε $y>0$. Άρα $\left(f'\leq 0, y>0\right)$ $0\leq f'(2y)(-y)\leq f(y)-f(2y)$. Από το κριτήριο της παρεμβολής και την (*) έπεται ότι $\lim\limits_{y\to+\infty} f'(2y)(y)=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)x=0$.

Θ8 ii) Έστω $M\in /R$ άνω φράγμα της f δηλαδή $f(t)\leq M$ για κάθε $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Άρα $f(x)\leq\int_0^x f(t)dt\leq Mx \leq M\cdot\frac{1}{2}$ για $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Έστω $k\in /N$ και ότι ισχύει $f(x)\leq M\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$ για $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Τότε $f(x)\leq\int_0^x f(t)dt\leq M\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot x\leq M\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right) =\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Άρα για κάθε $x\in[0,\frac{1}{2}]$ έχουμε $0\leq f(x)\leq M\left(\frac{1}{2}\right)^n$ για τυχαίο $n\in /N$. Όμως $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. Οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Θ10. Από τον τύπο του Taylor έχουμε $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$ για κάποιο ξ μεταξύ των $x,\ x_0$. Για $\left(x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, x_0=\alpha\right)$ και $\left(x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, x_0=\beta\right)$ έχουμε $\left(f'(\alpha)=f'(\beta)=0\right)$
$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(\alpha)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$, $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(\beta)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ για κάποια $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$. Άρα $|f(\beta)-f(\alpha)|=\left|\dfrac{f''(\xi_2)-f''(\xi_1)}{2}\right|\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\leq\dfrac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\leq$

(αν $|f''(\xi_2)|)\ \leq|f''(\xi_1)|)\leq\dfrac{2|f''(\xi_1)|}{2}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{|f''(\xi_1)|}{4}(\beta-\alpha)^2$.