Εξετάσεις στο μάθημα **«ΑΝΑΛΥΣΗ Ι»**
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών (εξέταση 5.2.2005)

Θέμα 1^{o}. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 2^{o}. i) Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 9}{10}$ για $n = 1,2,\ldots$. Αποδείξτε ότι η $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ συγκλίνει και προσδιορίστε το όριό της.

ii) Προσδιορίστε το όριο της ακολουθίας $\beta_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$, $n = 1,2,\ldots$.

Θέμα 3^{o}. Να αποδείξετε ότι: i) $1 - \dfrac{1}{x} < \log x < x - 1,\ x \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$

ii) $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n,\ x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4^{o}. Έστω $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ (σταθερός) και $f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{10} + \eta\mu(2x)^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ (k-1)(k-2^2)\ldots(k-n^2) + 4, & x = 0 \end{cases}$.

i) Να βρεθεί το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{R} : f_k$ συνεχής στο $x_0 = 0\}$.

ii) Αποδείξτε ότι $\sum\limits_{k\in A} k = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Θέμα 5^{o}. Έστω $x_0 \in (a,\beta)$, $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 και $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,\beta]$. Αποδείξτε ότι $F'(x_0) = f(x_0)$.

Θέμα 6^{o}. Έστω $a > 0$ και $f : [0,a) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,a)$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$ για κάθε $x \in [0,a)$.

Θέμα 7^{o}. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi t dt + \int_0^1 \tau o\xi\varepsilon\phi t dt$,

$I_3 = \int_0^1 x \log x\, dx$.

Θέμα 8^{o}. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\log^P n}$ για $p > 0$.

Θέμα 9^{o}. Προσδιορίστε το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2} y^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2} x^{3n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2} (x-1)^n$.

Θέμα 10^{o}. Για ποιές τιμές του x η τιμή $x - \dfrac{x^3}{3!}$ προσεγγίζει την $\eta\mu\, x$ με σφάλμα μικρότερο του 3.10^{-4};

- Να απαντήσετε σε 8 (οκτώ) θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα
- Μαζί με το γραπτό σας παραδίδετε και τα θέματα.

Ονοματεπώνυμο: ……………..…………………..

Α.Μ. : ……………………………….

Καλή επιτυχία!

<u>Απαντήσεις</u>

Κάθε άλλη απάντηση στα θέματα είναι δεκτή, εφ' όσον είναι τεκμηριωμένη.

1) - Σημειώσεις παραδόσεων, 18-10-04.
- Θεώρημα 3.17 (σελ 60), "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα.

2) i) Ισχ. 1: $a_n > 1$ για $n \in /N$.

Για $n=1$, $a_1 = 2 > 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n=k$ $\quad a_k > 1$. Τότε $a_{k+1} = \dfrac{a_k+9}{10} > \dfrac{1+9}{10} = 1$ ισχύει.

Από την αρχή της μαθ. επαγωγής ισχύει $a_n > 1$ για κάθε $n \in /N$.

Ισχ. 2: $a_{n+1} < a_n$ για $n \in /N$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+9}{10} - a_n = \frac{9-9a_n}{10} = \frac{9}{10}(1-a_n) < 0,\ n \in /N \quad (\text{από Ισχ. } 1).$$

Άρα η $(a_n)_{n\in /N}$ είναι φθίνουσα (ισχ. 2) και κάτω-φραγμένη (ισχ. 1). Επομένως η $(a_n)_{n\in /N}$ είναι συγκλίνουσα και έστω $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Έχουμε $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 9}{10} = \dfrac{\ell+9}{10}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell = 1$.

ii) $\beta_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n = \dfrac{(1+\frac{1}{3n})^n}{(1-\frac{1}{3n})^n}$. Ισχύει $e^x = \lim\limits_{n\infty 0}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in /R$ (Θέμα 3. ii). Άρα

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{3}}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(-\dfrac{1}{3})\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{3}}\left(x=\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}} = e^{2/3}$.

3) i) - η-τάξη, άσκηση 8.1.
- Θεώρημα 21.22 (ii) (σελ. 107) "Απειρ. Λογισμός ΙΙα" Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου, Ε. Γιαννακούλια.

ii) - n-τάξη, άσκηση 8.4 (ii)
- Πρόταση 21.38 (iv) (σελ. 115) "Απειρ. Λογισμός ΙΙα" Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου, Ε. Γιαννακούλια.

4) i) $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^8 + \dfrac{\eta\mu(2x)^2}{(2x)^2}\cdot 4\right) = 0 + 1\cdot 4 = 4$ (Γνωστό: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\eta\mu\, y}{y} = 1$). Για να είναι η f_k συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = f_k(0)$. Άρα $(k-1)(k-2^2)+\ldots+(k-n^2)+4=4$. Επομένως $A = \{1, 2^2, \ldots, n^2\}$.

ii) $\sum\limits_{k\in A} k = 1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- η-τάξη, άσκηση 1.11 (ii)
- Παράδειγμα 2.1 (σελ. 38), "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα.

5) - Σημειώσεις Παραδόσεων, 29-11-04.
- Θεώρημα 13.43 (σελ. 624), "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα.

6) Επειδή $f'(x)>0$ $x\in[0,a)$ η f είναι γνήσια αύξουσα, άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.
Επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και η f^{-1} είναι συνεχής άρα η $G(X)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt-xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη (Θέμα 5) και
$G'(X)=f(x)+f'(x)\cdot f^{-1}(f(x))-(f(x)+xf'(x))=f(x)+f'(x)\cdot x-f(x)-x\cdot f'(x)=0$,
$x\in[0,a)$. Άρα $G(x)=c$ (=σταθερά) $x\in[0,a)$. Όμως $G(0)=0$ ($f(0)=0$). Επομένως
$G(x)=0,\ x\in[0,a)$, δηλαδή $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=xf(x),\ x\in[0,a)$.

7) I_1: η-τάξη, άσκηση 9.5
$I_2=\int_0^x \varepsilon\phi\, tdt+\int_0^{\varepsilon\phi\, x}\tau o\xi\,\varepsilon\phi\, tdt=x\cdot\varepsilon\phi\, x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2})$ (Θέμα 6). Για $x=\frac{\pi}{4}$ έχουμε $I_2=\frac{\pi}{4}$.
I_3: η-τάξη, άσκηση 9.13.

8) - η-τάξη, άσκηση 10.6.
- Παράδειγμα 14.33 (σελ. 701), "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα.

9) - η-τάξη, άσκηση 11.2: Διασ. σύγκλισης $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
- Θέτω $x^3=y$: Διασ. σύγκλισης $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$
-Θέτω $x-1=y$: Διασ. σύγκλισης $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

10) $\eta\mu\, x=x-\frac{x^3}{3!}+R_4(x)$, όπου $R_4(x)=\frac{x^5}{5!}\eta\mu^5(\xi)$ για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Πρέπει $|R_4(x)|\le\frac{|x|^5}{5!}=\frac{|x|^5}{120}\le 3\cdot10^{-4}$. Άρα $|x|\le\sqrt[5]{120\cdot 3\cdot 10^{-4}}$ ($\cong 0.514$)
- Σημειώσεις παραδόσεων 10-01-05, 12-01-05
- Θεώρημα 10.40 (σελ. 438) και Παράδειγμα 10.22 (σελ. 445) "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα.