Εξετάσεις στο μάθημα **«ΑΝΑΛΥΣΗ Ι»**
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών (Σεπτέμβριος 2005)

Θέμα 1^{o}. Αποδείξτε ότι κάθε βασική ακολουθία (ακολουθία του Cauchy) είναι συγκλίνουσα (πλήρης απόδειξη).

Θέμα 2^{o}. i) Έστω η ακολουθία $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in /N$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

ii) Έστω η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in /N}$ με $|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \frac{1}{2^n}$, $n \in /N$. Αποδείξτε ότι η $(\beta_n)_{n\in /N}$ συγκλίνει.

Θέμα 3^{o}. Έστω $x_0 \in (a,\beta)$ και η συνάρτηση $f:(a,\beta) \to /R$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Ισχύει το αντίστροφο;

Θέμα 4^{o}. i) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f:/R \to /R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αλλά είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $/R \setminus \{0\}$.
ii) Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1] \to /R$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq a$ για $x \in (0,1]$.

Θέμα 5^{o}. Έστω $F:[-1,+1] \to /R$ με $F(x) = \int_0^x (1 - \eta\mu(\eta\mu t))dt$. Αποδείξτε ότι η F^{-1} ορίζεται καλά και είναι παραγωγίσιμη στο $F([-1,+1])$. Υπολογίστε την $(F^{-1})'(0)$.

Θέμα 6^{o}. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $I_1 = \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$, $\quad I_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Θέμα 7^{o}. Έστω $(a_n)_{n\in /N}$ ακολουθία. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: i) αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in /N$, είναι φραγμένη, ii) αν η $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in /N$, είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, iii) αν $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $n \in /N$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, iv) αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ ($a_n \neq 0$), τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Θέμα 8^{o}. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Θέμα 9^{o}. Αποδείξτε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x \in /R$.

Θέμα 10^{o}. Αποδείξτε ότι $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ όπου, $M_0 = \sup\{|f(x)| : x > 0\}$, $M_1 = \sup\{|f'(x)| : x > 0\}$, $M_2 = \sup\{|f''(x)| : x > 0\} > 0$ και $f:(0,+\infty) \to /R$ 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $(M_0, M_2 \in /R)$.

- Να απαντήσετε σε 8 (οκτώ) θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα
- Μαζί με το γραπτό σας παραδίδετε και τα θέματα.

Ονοματεπώνυμο: ……………..…………………..

Α.Μ. : ……………………………….

Καλή επιτυχία!

<u>Απαντήσεις</u>

Κάθε άλλη απάντηση στα θέματα είναι δεκτή, εφ' όσον είναι τεκμηριωμένη.

1) - Σημειώσεις παραδόσεων, 25-10-04.
   - Προτάσεις 3.28, 3.29, Θεώρημα 3.30 (Αντιστρόφως), "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα, 2002.

2) i) - η-τάξη, Άσκ. 4.1 ή Άσκ. 10.5 (ρ=1)
   - Παράδειγμα 3.9, "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα, 2002.

   ii) η-τάξη, Άσκ. 4.2 ($c=1$, $a=\frac{1}{2}$).

3) - Σημειώσεις παραδόσεων, 8-11-04
   - Θεώρημα 10.4 και Παράδειγμα 10.6, "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα, 2002.

4) i) Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2, \ x\in Q \\ -x^2, \ x\in \mathbb{R}\setminus Q\end{cases}$. Τότε $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$.

Έστω $x_0\neq 0$. Αν $x_0\in Q$, υπάρχει $y_n\in \mathbb{R}\setminus Q$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-y_n^2)=-x_0^2\neq x_0^2=f(x_0)$. Άρα (αρχή της μεταφοράς) η f είναι ασυνεχής στο x_0.

Αν $x_0\in \mathbb{R}\setminus Q$, υπάρχει $z_n\in Q$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x_0$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}z_n^2=x_0^2\neq -x_0^2=f(x_0)$. Άρα (αρχή της μεταφοράς) η f είναι ασυνεχής στο x_0.

Τελικά είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ii) Έστω ότι υπάρχει f που ικανοποιεί τις συνθήκες. Αν $x\in(0,1]$, υπάρχει $\xi_x\in(0,x)$ ώστε $f(x)-f(0)=f'(\xi_x)(x-0)$. Άρα $f(x)-f(0)\geq ax$ για $x\in(0,1]$. Τότε $0=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq a>0$. Άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει f με $f'(0)=0$ και $f'(x)\geq a$ $(a>0)$ $x\in(0,1]$.

5) Η $f(t)=1-\eta\mu(\eta\mu t)$, $t\in[-1,+1]$ είναι συνεχής άρα (1^o Θ.Θ.Α.Λ.) η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=1-\eta\mu(\eta\mu x)$, $x\in[-1,+1]$. Εφ' όσον $\eta\mu x\in[-1,+1]$ έχουμε $F'(x)>0$. Άρα η F είναι γνήσια αύξουσα. Οπότε ορίζεται η $F^{-1}:F([-1,+1])\to\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (Θεώρημα παραγώγισης αντιστρόφου συνάρτησης). Έχουμε $(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(F^{-1}(0))}$. Όμως $F(x)=0$ αν και μόνον αν $x=0$. Οπότε $(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{1-\eta\mu(\eta\mu 0)}=1$.

6) η-τάξη, Ασκ. 9.3, 9.5.

7) i) <u>Ψευδής</u>. Παράδειγμα: $a_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε $\lim a_n=0$ ενώ η $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένη (Θέμα 2^o, i).

ii) <u>Ψευδής</u>. Παράδειγμα: $a_n=(-1)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, $|S_n|\leq 1$, $n\in\mathbb{N}$, ενώ η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει ($(-1)^{n+1}$ δεν συγκλίνει.

iii) Ψευδής. Παράδειγμα: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in /N$. Τότε $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

(Θέμα 2^o, i).

iv) Αληθής. Απόδειξη: Υπάρχει $n_0 \in /N$ με $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0\ (= M)$ για $n \geq n_0$. Έστω $a_{n_0} > 0$. Τότε $a_{n_o+1} > 0$, οπότε (επαγωγικά) έχουμε $a_n > 0$ για $n \geq n_0$. Υπάρχει $n_1 \geq n_0$ με $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\ (= M')$ για $n \geq n_1$. Τότε $a_{n+1} > a_n$ $(a_n > 0,\ n \geq n_1)$, για $n \geq n_1$. Άρα $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_{n+1} \geq \sum_{n=n_1}^{\infty} a_{n_1} = +\infty$, οπότε και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Έστω $a_{n_0} < 0$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{-a_{n+1}}{-a_n} = +\infty$ με $-a_n > 0$. Οπότε, από το προηγούμενο έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = +\infty$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

8. η-τάξη: Ασκ. 10.8 (ii), (iv), 10.9 (iii).

9. - η-τάξη, Άσκ. 11.7.
   - Παράδειγμα 10.23, "Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός" Λ.Ν. Τσίτσα, 2002.

10. Έστω $x_0 \in (0,+\infty)$ τυχαίο (σταθερό σημείο) και $h > 0$. Τότε υπάρχει $\xi_h \in (x_0, x_0 + h)$ ώστε $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_h)}{2!}h^2$ (Τύπος Taylor).

Άρα $\left|f'(x_0)\right| = \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi_n)}{2}h\right| \leq \frac{\left|f(x_0+h) - f(x_0)\right|}{h} + \frac{h}{2}\left|f''(\xi_n)\right|$

$\leq \frac{\left|f(x_0+h)\right| + \left|f(x_{0)}\right|}{h} + \frac{h}{2}\left|f''(\xi_n)\right| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

Άρα $\sup\{\left|f'(x_0)\right| : x_0 \in (0,\infty)\} = M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$, $h > 0$, οπότε $M_1 \in /R$. Η συνάρτηση $g(y) = \frac{M_0}{y} + yM_2 - M_1$, $y > 0$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο $(0,+\infty)$ στο σημείο $y_0 = \left(\frac{M_0}{M_2}\right)^{1/2}$. Επομένως πρέπει $g(y_0) \geq 0$. Άρα $M_0\left(\frac{M_2}{M_0}\right)^{1/2} + M_2\left(\frac{M_0}{M_2}\right)^{1/2} \geq M_1$ ή $4M_0M_2 \geq M_1^2$.