

**Επώνυμο:**

**Όνομα:**

**A.M.**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>** Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  όπου  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ ,  $n \geq 1$  και  $b_n = \sqrt{3b_{n-1}}$ ,  $n \geq 2$ , με  $b_1 = \sqrt{3}$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup>** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας)

**α)** Αν η ακολουθία  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι φραγμένη, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει.

**β)** Αν η ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  έχει όριο το μηδέν, τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει.

**γ)** Αν  $0 \leq \gamma_n \leq \delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  συγκλίνει, τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$  συγκλίνει.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ .

**Θέμα 4<sup>ο</sup>** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι φραγμένη συνάρτηση.

**Θέμα 5<sup>ο</sup>** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας)

**α)** Κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

**β)** Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι συνεχής.

**Θέμα 6<sup>ο</sup>** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ . Ισχύει το ανωτέρω συμπέρασμα για  $f$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση;

**Θέμα 7<sup>ο</sup>** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα  $\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx$ ,  $\int_1^e \ln(x) dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ .

**Θέμα 8<sup>ο</sup>** Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

**Θέμα 9<sup>ο</sup>** Αποδείξτε ότι  $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Θέμα 10<sup>ο</sup>** Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f'(0) = f'(1) = 0. \text{ Αποδείξτε ότι υπάρχει } \xi \in (0, 1) \text{ με } |f''(\xi)| \geq 4.$$

- Να απαντήσετε σε 8 (οκτώ) θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

- Μαζί με το γραπτό σας παραδίδετε και τα θέματα.

**Καλή επιτυχία!**