ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ **ΑΝΑΛΥΣΗ Ι** **(10.9.07, 1η εξέταση)**
(13.10.07, επαναληπτική)

Επώνυμο:________________ Όνομα:__________ Α.Μ.__________

Θέμα 1ο Έστω $M=\{(a_n)_n : (a_n)_n$ μονότονη ακολουθία$\}$, $\Phi=\{(a_n)_n : (a_n)_n$ φραγμένη ακολουθία$\}$ και $\Sigma=\{(a_n)_n : (a_n)_n$ συγκλίνουσα ακολουθία$\}$. Εξετάστε αν ισχύει i) $\Phi\subseteq\Sigma$, ii) $M\cap\Phi\subsetneq\Sigma$. (Πλήρης αιτιολόγηση).

Θέμα 2ο Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών (εφ' όσον υπάρχουν)

$$a_n=\frac{2^n}{3^n+5^n},\quad \beta_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},\quad \gamma_n=\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n,\quad \delta_n=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{n\pi}{3}\right)\quad n\in\mathbb{N}$$

Θέμα 3ο Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a)<0<f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ με $f(\xi)=0$. Είναι ο ισχυρισμός αληθής αν η f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0\in[a,\beta]$;

Θέμα 4ο **i)** Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ κυρτή παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I με $f'(\xi)=0$ για κάποιο $\xi\in I$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο I.

ii) Να αποδείξετε ότι $\sum_{n=0}^{10}(x-2^n)^2\geq\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{2^{11}-1}{11}-2^n\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 5ο Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι

i) η $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ x\in[0,1]$ είναι συνεχής.

ii) Εάν $\int_0^1 f(t)dt=1$ τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $\int_0^\xi f(t)dt=\frac{1}{2}$

και **iii)** να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης f για την οποία $\int_0^1 f(t)dt=1$ και $\int_0^\xi f(t)dt=\frac{1}{2}$ για κάθε $\xi\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

Θέμα 6ο Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα i) $\int\eta\mu^3x\,\sigma\upsilon\nu^4x\,dx$, ii) $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}$, iii) $\int_1^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Θέμα 7ο Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^3+1}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\, n}{n^3}$, iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

Θέμα 8ο Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n+4^n}{5^n}\right)x^n$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ell n(n+1)}$.

Θέμα 9ο **i)** Έστω $x\in\mathbb{R}$ και $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi=\xi(x,n)$ μεταξύ των $0,x$ ώστε

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

ii) Αποδείξτε ότι $e\notin\mathbb{Q}$.

Θέμα 10ο Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(x)f(-x)\leq f^2(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(0)f''(0)\leq(f'(0))^2$.

- Να απαντήσετε σε 8 (οκτώ) θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
- Μαζί με το γραπτό σας παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!