ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, τμ. Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ιούνιος 2012 (5 Ιουλίου).

Θ1 Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με μερικές παραγώγους κάθε τάξης και πολυώνυμο Taylor 3ου βαθμού $T(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ στο σημείο $(2,1)$.

i) Να ευρεθεί το διαφορικό $df(2,1)$ $\boxed{1}$

ii) Εξετάστε αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $(2,1)$ και το είδος αυτού. $\boxed{1,5}$

Θ2 i) Εάν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, $\vec{T}(r,\theta)$ πολικός μετασχηματισμός και $\varphi=f\circ\vec{T}$, αποδείξτε ότι ισχύει: $\|\nabla f\|^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2$ $\boxed{1}$

ii) Να ευρεθεί συνάρτηση $V(x,y)$, ώστε το δ.π. $\vec{F}(x,y)=(e^{-y}\text{ημ}x,\, V(x,y))$ να είναι συντηρητικό στα $\mathbb{R}^2$ και να υπολογιστεί το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ η καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. $\boxed{1,5}$

Θ3 Εάν $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2-z}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $B_h=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le h\}$ και $B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\}$, να υπολογιστεί το $\iiint_B f\,dx\,dy\,dz =: \lim_{h\to+\infty}\iiint_{B_h} f\,dx\,dy\,dz$. $\boxed{2,5}$

Θ4 Έστω η $\vec{F}(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=\|\vec{r}\|$ με $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

i) Να υπολογιστούν ο στροβιλισμός και η απόκλιση του δ.π. $\vec{F}$ $\boxed{0,5}$

ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\Gamma=\{(x,y,0):\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1\}$ $(\alpha,\beta>0)$. $\boxed{0,5}$

iii) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, όπου $S:\{(x,y,z):\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1\}$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$ $\boxed{1,5}$

Καλή Επιτυχία