ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ και ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΏΝ

Εξέταση 16 Ιουνίου 2005

ΟΔΗΓΙΕΣ: ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

- Λύστε όλα τα θέματα. Η βαθμολογία είναι 50-50% για τα δυο μέρη (ένα για κάθε διδάσκοντα). Οι απαντήσεις σας να είναι σαφείς και σύντομες. Μακροσκελείς απαντήσεις κινδυνεύουν να πάρουν μικρό βαθμό.
- Σας έχουν δοθεί 3 κόλλες. Η πρώτη για το μέρος Α, η δεύτερη για το μερος Β και η τρίτη για πρόχειρο. Γράψτε πριν αρχίσει η εξέταση (δηλαδή τώρα!) το όνομα σας σε κάθε κόλλα που σας έχει δοθεί. Γράψτε στην πρώτη κόλλα 'ΜΕΡΟΣ Α', στη δεύτερη κόλλα 'ΜΕΡΟΣ Β' και στην τρίτη κόλλα 'ΠΡΌΧΕΙΡΟ'. Οι επιτηρητές θα περάσουν να το ελέγξουν. Είναι σημαντικό να ακολουθήσετε τις οδηγίες για να μας διευκολύνετε και να βαθμολογηθεί σωστά το γραπτό σας.
- Γράψτε πάνω στα θέματα το όνομά σας. Πρέπει να τα επιστρέψετε με όλες τις κόλλες (και το πρόχειρο). Τα θέματα θα αναρτηθούν στη σελίδα του μαθήματος.
- Δεν επιτρέπονται σημειώσεις, βιβλία, αριθμομηχανές, κλπ. Απομακρύνετε τα κινητά σας.
- Αντιγραφή συνεπάγεται μηδενισμό για **όλους** τους συμμετέχοντες για φέτος (συμπεριλαμβανομένης της εξεταστικής του Σεπτεμβρίου).
- Μπορείτε να σημειώσετε πάνω στο γραπτό σας αν επιθυμείτε να μην περαστεί η βαθμολογία σας όταν είναι κάτω από κάποιο ελάχιστο. Οι διδάσκοντες επιφυλάσσονται για το αν θα δεχθούν τέτοιο αίτημα.

ΜΕΡΟΣ Α′: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Διδάσκων: Η.Κουτσουπιάς

1. **[30%]** Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και με πεδίο τιμών επίσης το σύνολο των φυσικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο F δεν είναι αριθμήσιμο.

2. **[40%]** Θεωρήστε το σύνολο A των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ που ορίζεται με τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- $01 \in A$.
- Αν $w \in A$, τότε $w1w \in A$.

1. Ποιό σύνολο είναι το A; Περιγράψτε το με μια πρόταση της καθομιλουμένης.
2. Δώστε επίσης μια ακριβή μαθηματική περιγραφή.
3. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η μαθηματική περιγραφή που δώσατε εκφράζει το σύνολο A.

3. **[30%]** Έστω ότι ρίχνουμε b μπαλάκια σε n δοχεία. Το κάθε μπαλάκι ρίχνεται με ομοιόμορφη κατανομή στα δοχεία και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μπαλάκια. Υπολογείστε την πιθανότητα ότι κανένα δοχείο δεν περιέχει δύο ή περισσότερα μπαλάκια όταν

1. $b = 2$
2. $b = n$.
3. $b = n + 1$.

ΜΕΡΟΣ Β′: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Διδάσκων: Ι. Στρατής

1. **(α)** (i) Να λυθεί η δ.ε. $y'' + 4y = 3\cos 2t$.

(ii) Να λυθεί η δ.ε. $(3y + e^t) + (3t + \cos y)y' = 0$.

(β) Να υπολογισθεί, με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων, το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \alpha \sin\theta} \quad , \quad \alpha \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

2. **(α)** Να λυθεί η δ.ε. $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(β) (i) Να υπολογισθεί ο i^i.

(ii) Να υπολογισθεί το $\displaystyle\int_C \overline{z}\, dz$ επί των καμπυλών

(1) $C = C_1$: η καμπύλη από το $z = 0$ στο $z = 1$ και από εκεί στο $z = 1 + i$.

(2) $C = C_2$: το ευθύγραμμο τμήμα από το $z = 0$ στο $z = 1 + i$.

Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας ως προς το θεώρημα Cauchy-Goursat.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ και ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΏΝ
ΜΕΡΟΣ Α΄: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Διδάσκων: Η.Κουτσουπιάς
Λύσεις εξέτασης 16 Ιουνίου 2005

Πρόβλημα 1. Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και με πεδίο τιμών επίσης το σύνολο των φυσικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο F δεν είναι αριθμήσιμο.
Λύση. Με χρήση της μεθόδου της Διαγωνίου. Έστω ότι το σύνολο F είναι αριθμήσιμο. Τότε μπορούμε να βάλουμε τα στοιχεία του σε σειρά $f_1, f_2, \ldots$ έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του να εμφανίζονται στην ακολουθία αυτή. Το κάθε στοιχείο f_i είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θα κατασκευάσουμε τώρα ένα στοιχείο f του συνόλου F που διαφέρει από τα $f_1, f_2, \ldots$:

$$f(n) = f_n(n) + 1$$

Η συνάρτηση f διαφέρει από την f_1 στην τιμή $f(1)$, από την f_2 στην τιμή $f(2)$ κοκ. Η f είναι συνάρτηση από τους φυσικούς στους φυσικούς, είναι δηλαδή στοιχείο του F, και διαφέρει από κάθε όρο της ακολουθίας $f_1, f_2, \ldots$. Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι όλα τα στοιχεία του F εμφανίζονται στην ακολουθία.
Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το σύνολο A των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ που ορίζεται με τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- $01 \in A$.
- Αν $w \in A$, τότε $w1w \in A$.

1. Ποιό σύνολο είναι το A; Περιγράψτε το με μια πρόταση της καθομιλουμένης.
2. Δώστε επίσης μια ακριβή μαθηματική περιγραφή.
3. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η μαθηματική περιγραφή που δώσατε εκφράζει το σύνολο A.

Λύση. Οι συμβολοσειρές του συνόλου A αποτελούνται από 2^n διαδοχικά 011 από τις οποίες έχουμε αφαιρέσει το τελευταίο 1. Ισοδύναμα, κάθε συμβολοσειρά περιέχει $2^n - 1$ διαδοχικά 011 ακολουθούμενα από ένα 01. Πιο συγκεκριμένα, αν $(011)^k$ συμβολίζει τη συμβολοσειρά αποτελούμενη από την παράθεση k αντιγράφων του 011, τότε

$$A = \{(011)^{2^n-1}01 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτό είναι πράγματι το σύνολο A. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να δείξουμε δυο προτάσεις: Πρώτα ότι κάθε συμβολοσειρά που ανήκει στο A, δηλαδή κάθε συμβολοσειρά που παράγεται με τους παραπάνω κανόνες, έχει τη μορφή $(011)^{2^n-1}01$ για κάποιον φυσικό αριθμό n. Και το αντίστροφο, ότι δηλαδή κάθε συμβολοσειρά που είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ μπορεί να παραχθεί με τους παραπάνω κανόνες.

Για το πρώτο θα χρησιμοποιήσουμε δομική επαγωγή και για το δεύτερο μαθηματική επαγωγή στο n.

Πρόταση 1. *Κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ για κάποιο φυσικό αριθμό n.*

Απόδειξη. Με δομική επαγωγή.

Βάση δομικής επαγωγής: Το 01 είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ γιατί για $n = 0$: $(011)^{2^n-1}01 = (011)^0 01 = 01$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω $w \in A$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει n τέτοιο ώστε $w = (011)^{2^n-1}01$. Θα δείξουμε ότι το $w1w$ είναι της ίδιας μορφής. Πράγματι

$$w1w = (011)^{2^n-1}01\,1\,(011)^{2^n-1}01 = (011)^{2^n-1+1+2^n-1} = (011)^{2^{n+1}-1}01$$

είναι της ίδιας μορφής. □

Πρόταση 2. *Κάθε συμβολοσειρά της μορφής $(011)^{2^n-1}01$, όπου n φυσικός αριθμός, παράγεται με τους κανόνες που ορίζουν το σύνολο A.*

Απόδειξη. Με μαθηματική επαγωγή στο n.

Βάση της επαγωγής: Αν $n = 0$, τότε η συμβολοσειρά $(011)^{2^n-1}01 = (011)^0 01 = 01$ ανήκει στο σύνολο A, σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο n, δηλαδή $(011)^{2^n-1}01 \in A$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n+1$, δηλαδή ότι το $(011)^{2^{n+1}-1}01$ μπορεί να παραχθεί με τους παραπάνω κανόνες. Πράγματι, αν θέσουμε $w = (011)^{2^n-1}01$, τότε σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα, το $w1w$ ανήκει στο A και είναι ίσο με $w1w = (011)^{2^{n+1}-1}01$. □

Πρόβλημα 3. Έστω ότι ρίχνουμε b μπαλάκια σε n δοχεία. Το κάθε μπαλάκι ρίχνεται με ομοιόμορφη κατανομή στα δοχεία και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μπαλάκια. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κανένα δοχείο δεν περιέχει δυο ή περισσότερα μπαλάκια όταν

1. $b = 2$
2. $b = n$.

3. $b = n + 1$.

Λύση. Υπάρχουν n^b διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε b (αριθμημένα) μπαλάκια σε n δοχεία (το πρώτο μπαλάκι μπορεί να πάει σε n δοχεία, το δεύτερο σε n δοχεία κοκ). Από αυτούς τους τρόπους, οι $n(n-1)\cdots(n-b+1)$ έχουν το κάθε μπαλάκι σε διαφορετικό δοχείο (το πρώτο μπαλάκι μπορεί να πάει σε n δοχεία, το δεύτερο σε $n-1$ δοχεία γιατί το ένα είναι ήδη κατειλημμένο, κοκ· το b-οστό μπαλάκι μπορεί να πάει σε $n-(b-1) = n-b+1$ δοχεία γιατί $b-1$ δοχεία είναι ήδη κατειλημμένα). Άρα η πιθανότητα τα b μπαλάκια να καταλήξουν σε διαφορετικά δοχεία είναι

$$p_b = \frac{n(n-1)\cdots(n-b+1)}{n^b}$$

1. Για $b = 2$ η πιθανότητα αυτή είναι $p_2 = \frac{n(n-1)}{n^2} = (n-1)/n$.

2. Για $b = n$ η πιθανότητα είναι $p_n = n!/n^n$.

3. Για $b = n + 1$ η πιθανότητα είναι $p_{n+1} = 0$, αφού ο τελευταίος πολλαπλασιαστής του αριθμητή είναι $n - b + 1 = 0$. Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα και από την Αρχή του Περιστερώνα: Δεν μπορούμε να βάλουμε $n+1$ μπαλάκια σε n δοχεία χωρίς κάποιο δοχείο να περιέχει τουλάχιστον 2 μπαλάκια.