ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΘΗΝΑ 13 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2004

ΟΜΑΔΑ Α
ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (μονάδες 25)
α) Δίνεται η εξίσωση $f(x)=0$, $f(x)\in C[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$, η οποία έχει μία απλή ρίζα $\xi\in[\alpha,\beta]$. Αν η μέθοδος της Διχοτόμησης συγκλίνει στη ρίζα ξ με δεδομένη επιθυμητή ακρίβεια ε, να βρεθεί ένα κάτω φράγμα n_Δ του βαθμού των επαναλήψεων.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x$ η οποία έχει απλές ρίζες $\xi_1=0 \in[-0.9 , 0.9]$ και $\xi_2=\sqrt{3} \in[1.5 , 4]$. Να προταθούν κα να μελετηθούν ως προς την σύγκλισή τους επαναληπτικές μέθοδοι σταθερού σημείου της μορφής $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots$ για την εύρεση της προσεγγιστικής τιμής για κάθε μία από τις δύο ρίζες ξ_1,ξ_2 της $f(x)$.

Εφαρμογή: Εφαρμόστε μία από τις ανωτέρω προτεινόμενες ε.μ. για τον υπολογισμό του x_2.

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (μονάδες 25)
Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

α) Να βρεθεί ο A^{-1}με τη μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan (GJ) με μερική οδήγηση.

β) Να υπολογιστή ο αριθμός συνθήκης (condition number) $\kappa(A)=\|A\|_1\,\|A^{-1}\|_1$.

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (μονάδες 25)
Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{pmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 4 & k \\ 0 & k & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $k\in R$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων των επαναληπτικών μεθόδων (i) Jacobi(J) και (ii) SOR για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του κ) έτσι ώστε η ε.μ. (J) να συγκλίνει.

γ) Για κ=1 και $x^{(0)}=(-4,0,4)^T$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $x^{(2)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. (i) J και (ii) SOR με ω=1/2.

<u>ΘΕΜΑ 4</u> (μονάδες 25)
Δίνεται τα σημεία (x_i , f_1), $i=0(1)2$, όπου $x_i= a+ih$, $x_2= b$ και $f_i:=f(x_i)$ οι τιμές μίας συνάρτησης $f(x)\in[a,b]$.

α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής δευτέρου βαθμού $p_2(x)$ που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία. Στη συνέχεια με την βοήθεια του $p_2(x)$ να βρεθεί τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης , για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής του ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)\,dx$, καθώς και ο αντίστοιχος γενικευμένος τύπος.

β) *Εφαρμογή*: $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$