

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 30)

α) Δίνεται η εξίσωση $f(x)=0$, όπου $f(x) \in C^2[a,b]$.

i) Να βρεθεί η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson (N-R).

ii) Να δειχθεί ότι η τάξη σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου N-R είναι τουλάχιστον τετραγωνική αν η ρίζα ξ της ανωτέρω εξίσωσης είναι απλή.

β) Δίνεται η εξίσωση $x-k\eta x=0$, όπου $k \neq 0$ μία παράμετρος.

i) Να βρεθεί το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα I , τέτοιο ώστε για κάθε $x_0 \in I$ η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1}=k\eta x_n$, $n=0,1,2,\dots$ να συγκλίνει σε μία θετική ρίζα ξ της εξίσωσης.

ii) Να αποδειχθεί ότι η τάξη της σύγκλισης της μεθόδου σταθερού σημείου του (i) είναι γραμμική. Στη συνέχεια να μελετηθεί η ταχύτητα σύγκλισής της σε σχέση το k .

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 40)

Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k+4 \\ k-3 \end{pmatrix}, \quad k \in R.$$

α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. 1) Jacobi (J), 2) Gauss-Seidel (GS) να συγκλίνει. Ποια είναι η βέλτιστη τιμή k_0 του k έτσι ώστε να μεγιστοποιείτε η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου 1) J, 2) GS;

β) Να δειχθεί ότι $R(L)=2R(B)$, όπου $R(L), R(B)$ οι ταχύτητες σύγκλισης των ε.μ. GS και J, αντίστοιχα.

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων των επαναληπτικών μεθόδων 1) J και 2) GS για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

δ) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $x^{(1)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. 1) J και 2) GS για $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ και $k=1$.

ε) Σχολιάστε την προσέγγιση $x^{(1)}$ των μεθόδων J και GS σε σχέση με το β). Η ορθή λύση είναι: $x=(1,1,-1)^T$.

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 30)

α) Δίνεται ο πίνακας τιμών:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
f_i	0	2	3	4

της συνάρτησης $f(x) = \frac{6x}{x+2}$

i) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της $f(3)$.

ii) Αν στον παραπάνω πίνακα προστεθεί το σημείο $(-1,-6)$ ποια είναι η νέα προσεγγιστική τιμή της $f(3)$;

iii) Σχολιάστε τη συμπεριφορά του αριθμητικού σφάλματος στην (ii) περίπτωση σε σχέση με την (i). Δικαιολογήστε με βάση τη θεωρία.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) \in C^4[a,b]$.

i) Να βρεθεί ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson.

ii) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_1^3 (x^3 - 2) dx$ με τον κανόνα του Simpson.

Ποιο είναι το σφάλμα στον ανωτέρω τύπο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.