

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 35)

Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1}=x_n+\lambda(x_n^2-4)$, $n=0,1,2,\dots(1)$ για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $x^2-4=0$ (2).

α) Για κάθε ρίζα της (2):

- Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ έτσι ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου να συγκλίνει.
- Να βρεθεί η τιμή του λ έτσι ώστε η ανωτέρω ε.μ. να έχει τάξη σύγκλισης τουλάχιστον 2.

β) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: Η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της (2) είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την (1) για την τιμή του λ του ii) ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 35)

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & k & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 2 \\ 2+k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό τη μορφή συντεταγμένων των ε.μ. i) Gauss-Seidel (GS) και ii) SOR για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. (GS) να συγκλίνει.

γ) Για $k=-1$ και $x_0=(0,0,0)^T$ υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή x_2 της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. i) (GS) και ii) SOR για $\omega=1/2$.

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 30)

Να προσδιοριστούν οι συντελεστές w_i του προσεγγιστικού τύπου:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx h [w_0 f(-h) + w_1 f(0) + w_2 f(h)] .$$

έτσι ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. Για ποιο βαθμό πολυωνύμου ο ανωτέρω τύπος είναι ακριβής; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Εφαρμογή: $f(x)=\eta\mu x$, $h=\pi/2$.