ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΘΗΝΑ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 35)

Δίνονται στον παρακάτω πίνακα τα ζεύγη τιμών (x_i, f_i) , i=0(1)n μιας άγνωστης συνάρτησης f $(f(x)=x^3-3x+1)$, όπου $x_i \in [-1,3]$, $f_i:=f(x_i)$.

i	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	3
f_i	3	-1	3	19

α) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της f(1/2) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής του Newton:
i) στα 3 πρώτα σημεία του παραπάνω πίνακα
ii) σε όλα τα σημεία του παραπάνω πίνακα.

β) Να προταθεί και να μελετηθεί ως προς την σύγκλισή της μια επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου της μορφής $x_{n+1}=g(x_n)$, n=0,1,2,… για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας $\xi \in [0,1]$ της εξίσωσης P(x)=0, όπου P(x) το πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από όλα τα σημεία του παραπάνω πίνακα.
Εφαρμογή: Εφαρμόστε την ανωτέρω προτεινόμενη ε.μ. για τον υπολογισμό του x_2.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 35)

Δίνεται το τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα Ax=k , όπου $A \in R^{nxn}$, $x,k \in R^n$ και:

$$A = \begin{pmatrix} d & b & & & & \\ a & d & b & & 0 & \\ & a & d & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & a & d & b \\ & & & & & a & d \end{pmatrix}$$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου SOR για το ανωτέρω γραμμικό σύστημα λαμβάνοντας υπόψη την ειδική δομή του πίνακα A.

β) Αν θεωρήσουμε ότι είναι n=3 , a=b=(s≠0), d=4 , και $k=[4+s,4+2s,4+s]^T$
i) να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του s) έτσι ώστε η ε.μ. Gauss-Seidel (GS) να συγκλίνει.
ii) Για s= -1 και $x^{(0)}=(3,2,3)^T$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $x^{(2)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. GS.

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 30)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) \in C([a,b])$ και ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (Α.Ο):

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \omega_0 f(x_0) \text{ για } x_0 \in [a,b] \quad .$$

α) Να προσδιοριστεί η παράμετρος ω_0 ώστε ο ανωτέρω τύπος Α.Ο. να δίνει ακριβή αποτελέσματα για όσο το δυνατό μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα.

β) Να βρεθεί το σφάλμα όταν: (i) $x_0=a$, (ii) $x_0=b$ και (iii) $x_0=(a+b)/2$.

γ) Ποια η γεωμετρική ερμηνεία των τύπων (i) , (ii) και (iii): Σχολιάστε τα συμπεράσματά σας.

δ) Να εφαρμοστεί ο γενικευμένος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης για την (iii) στο β) για τον υπολογισμό του I όταν a=0 , b=1 και $f(x) = \frac{1}{1+x}$.