ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΘΗΝΑ 19 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

ΟΜΑΔΑ Β
ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 35)

Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου $x_{n+1}=x_n+\lambda(x_n^2-4)$, n=0,1,2,…(*) για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 , όπου $f(x)=x^2-4$.
Για την ρίζα ξ= -2 της εξίσωσης:

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (*) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ. σταθερού σημείου (*) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξεταστεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: *Η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson (N-R) για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας ξ= -2 είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (*) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο ερώτημα β.*

ΘΕΜΑ 2 (μανάδες 35)

Δίνεται το παρακάτω n x n γραμμικό σύστημα , όπου p δεδομένος θετικός ακέραιος αριθμός (1<p<n, n≥3) και $d_i\neq 0$, i=1,2,…,n.

$$\begin{bmatrix} d_1 & b_2 & & & & & & & 0 \\ a_2 & d_2 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & a_{p-1} & d_{p-1} & 0 & & & \\ & & & & a_p & d_p & b_p & & \\ & & & & 0 & d_{p+1} & b_{p+1} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & & 0 & d_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & & & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{p-1} \\ c_p \\ c_{p+1} \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

1. Να δοθεί αλγόριθμος , ο οποίος λαμβάνοντας υπόψη τη ειδική δομή του ανωτέρω συστήματος , να το επιλύει με την ε.μ. Gauss-Seidel (GS).
2. Για n=3 , p=2 , $d_1=d_2=d_3=2$, $a_2=b_2=0$, $b_1=a_3=-1$, $c_1=c_3=1$, $c_2=2$ και για $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του ερωτήματος 1 για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής $x^{(2)}$ της λύσης του συστήματος.

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 30)

Δίνονται τα σημεία (x_i, f_i), i=0(1)3 , όπου $x_i=a+ih$, $x_3=b$ και $f_i:=f(x_i)$ οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)\in C^4([a,b])$.

α) Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο παρεμβολής δευτέρου βαθμού $P_3(x)$ που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία .

β) Αν $f(x)=x^3-1$, a= -1 , b=2 , h=1 τότε να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)dx$ με τον σύνθετο τύπο των 3/8.
Ο ανωτέρω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης να εφαρμοστεί δύο φορές (αριθμός επαναλήψεων =2). Ποιο είναι το σφάλμα ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.