ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

11/5/2007

1η Ομάδα Ασκήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Θεωρία)

1.1 α) Έστω $fl(x)$ η παράσταση με κινητή υποδιαστολή ενός αριθμού x σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση β. Αν n είναι το πλήθος των ψηφίων της mantissa και εφαρμοστεί η τεχνική της στρογγύλευσης, να αποδειχθεί ότι :

$$\frac{|\, x - fl(x) \,|}{|\, x \,|} \leq \frac{1}{2}\beta^{-n+1}$$

β) Σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση $\beta = 10$, $n = 4$ και διάστημα για τον εκθέτη e το $[m, M] = [-5, 5]$ να βρεθούν :

(i) η μονάδα μηχανής ε, (ii) η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,
(iii) ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής και (iv) σε ποια διαστήματα συμβαίνει **υποχείλιση(underflow).**

1.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και οι αριθμοί $\overline{x}_1 = 2.302$ και $\overline{x}_2 = 0.2005$ με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων. Για τον υπολογισμό των τιμών $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$ να εφαρμόσετε **(Ι)** τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και **(ΙΙ)** τη μέθοδο του **σχήματος Horner** ($f(x) = x(x-5)+4$) με αριθμητική 4 σημαντικών ψηφίων. Για κάθε μέθοδο να υπολογιστεί, κατά προσέγγιση

α) Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα των ποσοτήτων $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$.
β) Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα των ποσοτήτων $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$.
γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα (α) και (β);

1.3 α) Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 0$, $f(x) \in C[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, η οποία έχει μια απλή ρίζα $\xi \in [a,b]$. Αν η μέθοδος της **Διχοτόμησης** συγκλίνει στη ρίζα ξ με δεδομένη επιθυμητή ακρίβεια ε, να βρεθεί ένα κάτω φράγμα n_D του αριθμού των επαναλήψεών της.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x^2 - 3)$. Να προταθεί και να μελετηθεί, ως προς τη σύγκλισή της (μια τουλάχιστον) επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου** της μορφής $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$ για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής για κάθε μια από τις ρίζες $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \sqrt{3}$ της $f(x)$. Για τη μελέτη σας λάβετε τα διαστήματα $[-0.9, 0.9]$ και $[1.5, 4]$ για τις ρίζες ξ_1 και ξ_2, αντίστοιχα.

Εφαρμογή: Εφαρμόστε μια από τις ανωτέρω προτεινόμενες ε.μ. για τον υπολογισμό της ξ_2 (3 επαναλήψεις).

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(x_n^2 - 3), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = x^2 - 3$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{3}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{3}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β)$\}$.

1.5 **α)** Να αποδειχθεί ότι αν η μέθοδος Newton-Raphson(N-R) συγκλίνει σε μια ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ βαθμού πολλαπλότητας $k > 1$, τότε η σύγκλισή της είναι γραμμική.

β) Αν $f(x) = x(x-2)^3$, τότε να επιλέξετε και εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου N-R για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 1$. Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u> (Υλοποίηση αλγορίθμων-Εφαρμογές)

Προσοχή: Η ένδειξη * πριν από κάποιο ερώτημα σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι προαιρετικό.

2.1 Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις και τα αντίστοιχα διαστήματα $[a,b]$ στα οποία περιέχεται μία πραγματική τους ρίζα ξ.

α) $f_1(x) = (x-1)^3(x+2), \quad [0,\ 2]$ *** β)** $f_2(x) = x - \cos x, \quad [0.5,\ 1]$

γ) $f_3(x) = e^x - 2x - 2, \quad [1,\ 2]$ *** δ)** $f_4(x) = x^2 - 3, \quad [1,\ 3]$

2.1.1 Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή x_n της ρίζας ξ, με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-6}$ και για διάφορες επιλογές της αρχικής τιμής x_0 υλοποιώντας σε γλώσσα C (ή C++) τις παρακάτω επαναληπτικές μεθόδους:

*** (I) Διχοτόμησης, *(II) Σταθερού Σημείου, (III) Newton-Raphson (N-R)** και **(IV) Συνδυασμός Διχοτόμησης και N-R.**

Ο συνδυασμός της μεθόδου **N-R** με τη μέθοδο της **Διχοτόμησης** να υλοποιηθεί ως ακολούθως: να εφαρμοστεί αρχικά η μέθοδος Διχοτόμησης για τον εντοπισμό ενός διαστήματος πλάτους μικροτέρου από $\varepsilon_\Delta = \frac{1}{2}10^{-2}$ και στη συνέχεια για το διάστημα αυτό να εφαρμοστεί η μέθοδος N-R με x_0 το μέσο του και με επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon_{NR} = \frac{1}{2}10^{-6}$.

2.1.2 Να μελετήσετε πειραματικά την ταχύτητα σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων **(I)- (III)**. Η μελέτη αυτή να γίνει με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p}, \quad \text{αν η ρίζα είναι γνωστή, διαφορετικά} \quad \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p}, \quad p = 1,2 .$$

2.1.3 Να συμπληρώσετε(σε αρχείο κειμένου) τον παρακάτω πίνακα αποτελεσμάτων:

Πίνακας Αποτελεσμάτων

	Μέθοδος															
	*I				*II				III				IV			
	x_0	x_n	$f(x_n)$	n	x_0	x_n	$f(x_n)$	n	x_0	x_n	$f(x_n)$	n	x_0	x_n	$f(x_n)$	n
f_1																
$*f_2$																
f_3																
$*f_4$																

*** 2.1.4** Να δικαιολογηθεί, με βάση τη θεωρία, η συμπεριφορά της σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Να σχολιαστεί τόσο η σύγκλιση όσο και η τάξη σύγκλισης.

*** 2.1.5** Να επαληθεύσετε πειραματικά την τιμή του λ στο 1.4 β). Πιο συγκεκριμένα για το διάστημα τιμών του λ στο 1.4 α) να βρεθεί εκείνη η τιμή που παράγει το μικρότερο πλήθος επαναλήψεων.

*** 2.1.6** Να επαληθεύσετε πειραματικά την απάντηση στο 1.4 γ).

*** 2.2** Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 0$ ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Για την αριθμητική επίλυσή της να υλοποιήσετε ένα αλγόριθμο σε γλώσσα C ο οποίος να εκτελεί τα ακόλουθα :

*** α)** Να διαμερίζει το διάστημα $[a,b]$ σε N ίσα υποδιαστήματα.

*** β)** Να ελέγχει αν υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f στο κάθε υποδιάστημα.

*** γ)** Αν υπάρχει να εφαρμόζει τη μέθοδο **Newton-Raphson(N-R)** με αρχικό σημείο x_0 το μέσο του συγκεκριμένου υποδιαστήματος, διαφορετικά να προχωρά στο επόμενο υποδιάστημα.

Εφαρμογές: **(i)** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, **(ii)** $f(x) = \cos x - e^{-x}$
στο $[0,20]$ με N και ε της επιλογής σας.

<u>Σημείωση</u> : Όλες οι υλοποιήσεις στην **Άσκηση 2** να γίνουν σε γλώσσα C (ή C++).

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Ομάδας Ασκήσεων

Υπόδειξη : *Για λόγους εξοικονόμησης χρόνου και ανάπτυξης πνεύματος εποικοδομητικής συνεργασίας η εργασία συνιστάται να γίνει από δύο άτομα (**αποκλείεται** η συνεργασία περισσοτέρων των δύο ατόμων).*

Προσοχή : Η ένδειξη * πριν από κάποιο ερώτημα σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι προαιρετικό.

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης :

Η **1η Ομάδα Ασκήσεων** θα παραδοθεί ως εξής :

Η **ΑΣΚΗΣΗ 1** θα παραδοθεί σε φάκελο (1 φάκελος ανά ομάδα) στον οποίο θα αναγράφετε εξωτερικά (Α.Μ. και Ονοματεπώνυμα) και θα περιέχει συμπληρωμένο το ''**Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων''.**

Χρησιμοποιήστε ένα αντίγραφο από το έντυπο (βλ. παρακάτω) και συμπληρώστε τις απαντήσεις σας όπως διευκολύνεστε (χειρόγραφα ή ηλεκτρονικά).

Η υποβολή θα γίνει στο γραφείο της Γραμματείας του Α' Τομέα (κ. Γ. Κουνιάς) τη **Δευτέρα 21.5.2007** και **ώρα 12-2.**

Η **ΑΣΚΗΣΗ 2** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά (με e-mail) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: ar_analysi@di.uoa.gr από **Τρίτη 22.5.2007** μέχρι και τη **Πέμπτη 24.5.2007** και **ώρα 20:00.**

Η **ΑΣΚΗΣΗ 2** θα πρέπει να περιλαμβάνει: ένα αρχείο με όνομα ***ask_1_onoma*** (επέκταση (**.c)** ή (.cpp}) που θα περιέχει μόνο τον **πηγαίο κώδικα** για κάθε πρόγραμμα και ένα **αρχείο κειμένου** με όνομα ***ask_1_onoma*** (.doc σε word) για την περιγραφή των αλγορίθμων, την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων σας.

Χρησιμοποιήστε ένα αντίγραφο από το έντυπο με τον πίνακα αποτελεσμάτων(βλ. παρακάτω) για να τον συμπληρώσετε.

Στο μήνυμά σας(e_mail} το θέμα (subject) θα είναι μόνο : τα ονοματεπώνυμα, οι ΑΜ της ομάδας (π.χ. Παναγιώτου Γ. 200400158, Πέτρου Φ. 200300291).

Στο μήνυμά σας(e_mail} πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ τον **πηγαίο κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και **το αρχείο κειμένου** με την ανάλυση. (Αν σας είναι γνωστό, επιθυμητό θα ήταν, τα αρχεία αυτά να είναι συμπιεσμένα σε ένα αρχείο, με κάποιο πρόγραμμα συμπίεσης, π.χ. winzip).

Όροι αποδοχής της 1ης Ομάδας Ασκήσεων

Για να γίνει αποδεκτή για αξιολόγηση η εργασία σας θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα, διαφορετικά θα απορρίπτεται ως μη αποδεκτή:

- Η καθεμία από τις Ασκήσεις 1 και 2 να παραδοθεί εμπρόθεσμα σύμφωνα με τις προαναφερόμενες καταληκτικές ημερομηνίες.

- Σε κάθε συνημμένο αρχείο να γράφετε τα ονόματα (μέχρι δύο) της ομάδας (σαν σχόλιο στον κώδικα).

- Το **αρχείο κειμένου** (στην Άσκηση 2) εκτός από τα ονόματα της ομάδας θα περιέχει τα ακόλουθα:

  - **(i)** ***Εκφώνηση άσκησης***
  - **(ii)** ***Ανάλυση – Σχεδιασμός :*** Στην ενότητα αυτή θα περιγράψετε τη μέθοδο λύσης του προβλήματος αναλυτικά).
  - **(iii)** ***Αλγόριθμος:*** (Με βάση την ανάλυση-σχεδιασμό στο (ii) θα δώσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου επίλυσης του προβλήματός σας.
  - **(iv)** ***Υλοποίηση*. *Παρουσίαση του κώδικα***
  - **(v)** ***Αποτελέσματα*** : Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσετε τα αποτελέσματα (και τα δεδομένα) για τρία τουλάχιστον τρεξίματα του προγράμματός σας με διαφορετικά δεδομένα το καθένα.
  - **(vi)** ***Σχολιασμός:*** Σχολιασμός των αποτελεσμάτων με βάση τη θεωρία. Στην ενότητα αυτή θα γράψετε με έντονα (bold) γράμματα, ποια προαιρετικά ερωτήματα υλοποιεί το πρόγραμμά σας .

ΠΡΟΣΟΧΗ

- 1. Σε περίπτωση αντιγραφής ή όμοιου κώδικα συνεπάγεται μηδενική βαθμολογία.

- 2. Η κάθε άσκηση θα πρέπει να λύνεται με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

- 3. Επίσης, θα λαμβάνεται κυρίως υπόψη η αποτελεσματικότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται με βάση την ύλη που έχετε διδαχθεί.

- 4. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης καμία από τις ασκήσεις δεν θα γίνεται δεκτή.

- 5. Η αποστολή μηνύματος σε άλλη διεύθυνση, εκτός αυτής που θα σας ανακοινωθεί, θα καταστήσει το μήνυμα απορριπτέο χωρίς την ενημέρωσή σας.

- 6. Λόγω της ηλεκτρονικής αποστολής της Άσκησης 2 δεν θα γίνεται καμία δικαιολογία αποδεκτή για την μη αποστολή της εντός της προθεσμίας.

- 8. Ο κώδικάς σας θα πρέπει να τρέχει στον μεταγλωττιστή της C (ή C++) του εργαστηρίου των PC,s, διαφορετικά η άσκησή σας δεν γίνεται δεκτή.

- 9. Η εκφώνηση της άσκησης μπορεί να τροποποιείται και να συμπληρώνεται. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την παρούσα ιστοσελίδα(e-class).

Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u> (Θεωρία)

Α.Μ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

1. ………………… ……………………………………………………….

2. ………………… ……………………………………………………….

1.1 α) Έστω $fl(x)$ η παράσταση με κινητή υποδιαστολή ενός αριθμού x σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση β. Αν n είναι το πλήθος των ψηφίων της mantissa και εφαρμοστεί η τεχνική της στρογγύλευσης, να αποδειχθεί ότι :

$$\frac{|\, x - fl(x)\,|}{|\, x\,|} \leq \frac{1}{2}\beta^{-n+1}$$

β) Σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση $\beta = 10$, $n = 4$ και διάστημα για τον εκθέτη e το $[m, M] = [-5, 5]$ να βρεθούν :

(i) η μονάδα μηχανής ε, (ii) η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,

(iii) ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής και (iv) σε ποια διαστήματα συμβαίνει **υποχείλιση(underflow).**

1.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και οι αριθμοί $\overline{x}_1 = 2.302$ και $\overline{x}_2 = 0.2005$ με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων. Για τον υπολογισμό των τιμών $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$ να εφαρμόσετε **(I)** τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και **(II)** τη μέθοδο του **σχήματος Horner** ($f(x) = x(x-5)+4$) με αριθμητική 4 σημαντικών ψηφίων. Για κάθε μέθοδο να υπολογιστεί, κατά προσέγγιση

α) Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα των ποσοτήτων $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$.

β) Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα των ποσοτήτων $f(\overline{x}_1)$ και $f(\overline{x}_2)$.

γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα (α) και (β);

1.3 **α)** Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 0, \quad f(x) \in C[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, η οποία έχει μια απλή ρίζα $\xi \in [a,b]$. Αν η μέθοδος της **Διχοτόμησης** συγκλίνει στη ρίζα ξ με δεδομένη επιθυμητή ακρίβεια ε, να βρεθεί ένα κάτω φράγμα n_D του αριθμού των επαναλήψεών της.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x^2 - 3)$. Να προταθεί και να μελετηθεί, ως προς τη σύγκλισή της (μια τουλάχιστον) επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου** της μορφής $x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots$ για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής για κάθε μια από τις ρίζες $\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \sqrt{3}$ της $f(x)$. Για τη μελέτη σας λάβετε τα διαστήματα $[-0.9, 0.9]$ και $[1.5, 4]$ για τις ρίζες ξ_1 και ξ_2, αντίστοιχα.

Εφαρμογή: Εφαρμόστε μια από τις ανωτέρω προτεινόμενες ε.μ. για τον υπολογισμό της ξ_2 (3 επαναλήψεις).

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(x_n^2 - 3), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = x^2 - 3$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{3}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση:
Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{3}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β)$\}$.

1.5 **α)** Να αποδειχθεί ότι αν η μέθοδος Newton-Raphson(N-R) συγκλίνει σε μια ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ βαθμού πολλαπλότητας $k > 1$, τότε η σύγκλισή της είναι γραμμική.

β) Αν $f(x) = x(x-2)^3$, τότε να επιλέξετε και εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου N-R για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 1$. Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u> (Υλοποίηση αλγορίθμων-Εφαρμογές)

Α.Μ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

1. ………………… ……………………………………………………….

2. ………………… ……………………………………………………….

Πίνακας Αποτελεσμάτων

<table>
<tr><td></td><td colspan="16">Μέθοδος</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">*I</td><td colspan="4">*II</td><td colspan="4">III</td><td colspan="4">IV</td></tr>
<tr><td></td><td>x_0</td><td>x_n</td><td>$f(x_n)$</td><td>n</td><td>x_0</td><td>x_n</td><td>$f(x_n)$</td><td>n</td><td>x_0</td><td>x_n</td><td>$f(x_n)$</td><td>n</td><td>x_0</td><td>x_n</td><td>$f(x_n)$</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="3">f_1</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$*f_2$</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">f_3</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$*f_4$</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>