ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

13/3/2008

1η Ομάδα Ασκήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Θεωρία)

1.1 Σε ένα σύστημα αρίθμησης με βάση $\beta = 10$, αν $n = 8$ είναι το πλήθος των ψηφίων της mantissa (ουρά) και $[m, M] = [-6, 7]$ είναι το διάστημα για τον εκθέτη e να βρεθούν :

α) η μονάδα μηχανής ε, **β)** η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,
γ) το πλήθος των θετικών αριθμών μηχανής , **δ)** ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος θετικός κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής και
ε) σε ποια διαστήματα συμβαίνει **υποχείλιση(underflow).**

1.2 Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$. Αν $b^2 - 4ac > 0$, τότε οι ρίζες της μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των δυο παρακάτω διαφορετικών τύπων

(I) $\xi_{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\alpha}$ **(II)** $\xi_+ = \dfrac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, $\xi_- = \dfrac{c}{a\xi_+}$.

Εφαρμογή: Δίνονται $a = 1$, $b = 111.11$, $c = 1.2121$.
(Ακριβείς τιμές : $\xi_+ =$ -0.01091008036948, $\xi_- =$ -111.09908991963051). Να υπολογίσετε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 5 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση τις ρίζες της εξίσωσης εφαρμόζοντας τους τύπους **(I)** και **(II)**.
Για κάθε τύπο να εκτιμήσετε, κατά προσέγγιση

α) Το απόλυτο σφάλμα των υπολογιζόμενων τιμών $\overline{\xi_+}$ και $\overline{\xi_-}$ των ριζών.
β) Το απόλυτο σχετικό σφάλμα των υπολογιζόμενων $\overline{\xi_+}$ και $\overline{\xi_-}$ των ριζών.
γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα α) και β); Συγκρίνατε ως προς την ακρίβεια τους δύο τύπους. Σχολιάστε τα συμπεράσματά σας..

1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$.

α) Αποδείξτε ότι η f έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $\mathbb{R}$.
β) Να βρεθεί ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου** $x_{n+1} = \dfrac{5}{x_n^2} + 2,\ n = 0,1,2,\ldots$ να συγκλίνει στη ρίζα ξ για κάθε $x_0 \in [a, b]$.
γ) Να εφαρμόσετε για $x_0 = 2$ τρεις επαναλήψεις της ανωτέρω μεθόδου για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(\frac{1}{2}x_n^2 - 1), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{2}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{2}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β)}.

1.5 **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^3(x-2)$, αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος **N-R** συγκλίνει στη ρίζα ξ=-1 της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια βελτιωμένη μορφή της μεθόδου **N-R** για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 0$.

γ) Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της νέας μορφής της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u> (Υλοποίηση αλγορίθμων-Εφαρμογές)

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις και τα αντίστοιχα διαστήματα $[a,b]$ στα οποία περιέχεται μία πραγματική τους ρίζα ξ.

α) $f_1(x) = (x+1)^3(x-2), \quad [1,\,3]$ **β)** $f_2(x) = e^x - x^2 - 2, \quad [1,\,2]$

2.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τους αλγορίθμους των επαναληπτικών μεθόδων :

(I) Newton-Raphson (N-R) και **(II) Τέμνουσας**

για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_n της ρίζας $\xi \in [a,b]$ των ανωτέρω συναρτήσεων.

<u>*Υπόδειξη*</u>: Οι τιμές των συναρτήσεων f και f' θα υπολογίζονται με την χρήση των συναρτήσεων f(x) και df(x), αντίστοιχα. Ως δεδομένα θα δίνονται η αρχική τιμή x_0 για την **(I)** (ή το ζεύγος αρχικών τιμών (x_0, x_1) για την **(II)**), η επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-6}$ και ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός επαναλήψεων maxiter .

2.2 Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο **2.1** να επαληθεύσετε πειραματικά την τάξη σύγκλισης p των επαναληπτικών μεθόδων **(I)** και **(II)** στις ανωτέρω περιπτώσεις **α)** και **β).**

<u>*Υπόδειξη*</u>: Με βάση τη θεωρία θεωρήστε ότι η τάξη σύγκλισης είναι p=2 για την **N-R** και p=$(1+\sqrt{5})/2$ για την **Τέμνουσα** και υπολογίστε την αντίστοιχη ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος(ή συντελεστή σύγκλισης) c έτσι ώστε να επαληθεύεται ότι

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \mathrm{c}$, αν η ρίζα είναι γνωστή (στο **α)**),

ή $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p} = \mathrm{c}$, αν η ρίζα είναι άγνωστη (στο **β)**).

2.3 Για την υλοποίηση των **2.1** και **2.2** να επιλεγούν (τρεις τουλάχιστον) διαφορετικές τιμές της αρχικής τιμής x_0 (ή των αρχικών τιμών (x_0, x_1)) και να συμπληρώσετε αντίστοιχα, τους παρακάτω πίνακες 1 και 2 αποτελεσμάτων.

Πίνακες Αποτελεσμάτων

Πίνακας 1

	(I) Newton-Raphson (N-R)				**(II) Τέμνουσας**			
	x_0	x_n	$f(x_n)$	n	(x_0, x_1)	x_n	$f(x_n)$	n
f_1								
f_2								

Πίνακας 2

	(I) N-R $p = 2$		**(II) Τέμνουσας** $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
	x_0	c	(x_0, x_1)	c
f_1				
f_2				

2.4 Να δικαιολογηθεί, με βάση τη θεωρία, η συμπεριφορά της σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων **(I)** και **(II)** σε κάθε περίπτωση στους ανωτέρω πίνακες αποτελεσμάτων.

<u>Σημείωση</u> : Όλες οι υλοποιήσεις στην **Άσκηση 2** να γίνουν σε γλώσσα C (ή C++).

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Ομάδας Ασκήσεων

Υπόδειξη : *Για λόγους εξοικονόμησης χρόνου και ανάπτυξης πνεύματος εποικοδομητικής συνεργασίας η εργασία συνιστάται να γίνει από δύο άτομα (**αποκλείεται** η συνεργασία περισσοτέρων των δύο ατόμων). Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στην 2η Ομάδα Ασκήσεων.*

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης :

Η **1η Ομάδα Ασκήσεων** θα παραδοθεί ως εξής :

Η **ΑΣΚΗΣΗ 1** θα παραδοθεί σε φάκελο (1 φάκελος ανά ομάδα) στον οποίο θα αναγράφετε εξωτερικά (Α.Μ. και Ονοματεπώνυμα) και θα περιέχει συμπληρωμένο το ''**Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων''.**

Χρησιμοποιήστε ένα αντίγραφο από το έντυπο (βλ. παρακάτω) και συμπληρώστε τις απαντήσεις σας όπως διευκολύνεστε (χειρόγραφα ή ηλεκτρονικά).

Η υποβολή θα γίνει στο γραφείο της Γραμματείας του Α' Τομέα (κ. Γ. Κουνιάς) τη **Δευτέρα 31.3.2008** και **ώρα 12-2.**

Η **ΑΣΚΗΣΗ 2** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά (με e-mail) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: ARANALYSH@di.uoa.gr από **Τετάρτη 2.4.2008** μέχρι και τη **Παρασκευή 4.4.2008** και **ώρα 20:00.**

Η **ΑΣΚΗΣΗ 2** θα πρέπει να περιλαμβάνει:

1) τα αρχεία με όνομα ***ask2_method_i*** (.c ή .cpp) που το καθένα θα περιέχει μόνο τον **πηγαίο κώδικα** για την αντίστοιχη μέθοδο (όπου ***method*** το όνομα της μεθόδου (δηλ. NR ή TEM) και ***i*** η ένδειξη του ερωτήματος (δηλ. 2.1 ή 2.2) και
2) ένα μόνο **αρχείο κειμένου** με όνομα ***ask2_apotel*** (.doc σε word) για την περιγραφή των αλγορίθμων, την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων σας .

Χρησιμοποιήστε ένα έτοιμο αντίγραφο από το αρχείο word (βλ. e-class), στο οποίο περιέχονται η εκφώνηση καθώς και οι πίνακες αποτελεσμάτων για να τους συμπληρώσετε.

Στο μήνυμά σας(e_mail} το θέμα (subject) θα είναι μόνο : τα ονοματεπώνυμα, οι ΑΜ της ομάδας (π.χ. Παναγιώτου Γ. 200400158, Πέτρου Φ. 200300291).

Επίσης στο μήνυμά σας(e_mail} πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα ASK2_xxxxxxx.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. του ενός από τα μέλη της ομάδας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο**(source) **κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση.

Προσοχή : Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου *(**κώδικα** και **κειμένου**) να* αναγράφετε τα ονοματεπώνυμα και τους ΑΜ της ομάδας σας.

Όροι αποδοχής της 1ης Ομάδας Ασκήσεων

Για να γίνει αποδεκτή για αξιολόγηση η εργασία σας θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα, διαφορετικά θα απορρίπτεται ως μη αποδεκτή:

- Η καθεμία από τις Ασκήσεις 1 και 2 να παραδοθεί εμπρόθεσμα σύμφωνα με τις προαναφερόμενες καταληκτικές ημερομηνίες.

- Σε κάθε συνημμένο αρχείο να γράφετε τα ονόματα της ομάδας (σαν σχόλιο στον κώδικα).

- Το **αρχείο κειμένου** (στην Άσκηση 2) εκτός από τα ονόματα της ομάδας θα περιέχει τα ακόλουθα:
  - **(i)** ***Εκφώνηση άσκησης*** (έτοιμο αντίγραφο της εκφώνησης)
  - **(ii)** ***Ανάλυση – Σχεδιασμός :*** Στην ενότητα αυτή θα περιγράψετε σύντομα τη μέθοδο λύσης του προβλήματος).
  - **(iii)** ***Αλγόριθμος:*** Με βάση την ανάλυση-σχεδιασμό στο (ii) θα δώσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου επίλυσης του προβλήματός σας.
  - **(iv)** ***Υλοποίηση: Παρουσίαση του κώδικα***
  - **(v)** ***Αποτελέσματα*** : Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσετε τα αποτελέσματα (και τα δεδομένα) για τρία τουλάχιστον τρεξίματα του προγράμματός σας με διαφορετικά δεδομένα το καθένα.
  - **(vi)** ***Σχολιασμός:*** Σχολιασμός των αποτελεσμάτων με βάση τη θεωρία.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- 1. Σε περίπτωση αντιγραφής ή όμοιου κώδικα συνεπάγεται μηδενική βαθμολογία.

- 2. Η κάθε άσκηση θα πρέπει να λύνεται με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

- 3. Επίσης, θα λαμβάνεται κυρίως υπόψη η αποτελεσματικότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται με βάση την ύλη που έχετε διδαχθεί.

- 4. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης καμία από τις ασκήσεις δεν θα γίνεται δεκτή.

- 5. Η αποστολή μηνύματος σε άλλη διεύθυνση, εκτός αυτής που προαναφέρεται, θα καταστήσει το μήνυμα απορριπτέο χωρίς την ενημέρωσή σας.

- 6. Λόγω της ηλεκτρονικής αποστολής της Άσκησης 2 δεν θα γίνεται καμία δικαιολογία αποδεκτή για την μη αποστολή της εντός της προθεσμίας.

- 8. Ο κώδικάς σας θα πρέπει να τρέχει στον μεταγλωττιστή της C (ή C++) του εργαστηρίου των PC,s.

- 9. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό (Σημειώσεις, Διαφάνειες, Φροντιστηριακές Ασκήσεις, Ασκήσεις, Βαθμολογίες).

Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u> (Θεωρία)

Α.Μ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

1. ………………… ……………………………………………………….

2. ………………… ……………………………………………………….

1.1 Σε ένα σύστημα αρίθμησης με βάση $\beta = 10$, αν $n = 8$ είναι το πλήθος των ψηφίων της mantissa (ουρά) και $[m, M] = [-6, 7]$ είναι το διάστημα για τον εκθέτη e να βρεθούν :

α) η μονάδα μηχανής ε, **β)** η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,
γ) το πλήθος των θετικών αριθμών μηχανής , **δ)** ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος θετικός κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής και
ε) σε ποια διαστήματα συμβαίνει **υποχείλιση(underflow).**

1.2 Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$. Αν $b^2 - 4ac > 0$, τότε οι ρίζες της μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των δυο παρακάτω διαφορετικών τύπων

(I) $\xi_{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\alpha}$ **(II)** $\xi_{+} = \dfrac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \xi_{-} = \dfrac{c}{a\xi_{+}}.$

<u>*Εφαρμογή:*</u> Δίνονται $a = 1, \quad b = 111.11, \quad c = 1.2121$.

(Ακριβείς τιμές : $\xi_{+} = 0.01091008036948$, $\xi_{-} = 111.09908991963051$). Να υπολογίσετε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 5 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση τις ρίζες της εξίσωσης εφαρμόζοντας τους τύπους **(I)** και **(II)**.

Για κάθε τύπο να υπολογιστεί, κατά προσέγγιση

α) Το απόλυτο σφάλμα των υπολογιζόμενων τιμών $\overline{\xi_{+}}$ και $\overline{\xi_{-}}$ των ριζών.

β) Το απόλυτο σχετικό σφάλμα των υπολογιζόμενων $\overline{\xi_{+}}$ και $\overline{\xi_{-}}$ των ριζών.

γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα α) και β);
Συγκρίνατε ως προς την ακρίβεια τους δύο τύπους. Σχολιάστε τα συμπεράσματά σας..

1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2-5$.

α) Αποδείξτε ότι η f έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ένα διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου** $x_{n+1}=\dfrac{5}{x_n^2}+2,\ n=0,1,2,\ldots$ να συγκλίνει στη ρίζα ξ για κάθε $x_0\in[a,b]$.

γ) Να εφαρμόσετε για $x_0=2$ τρεις επαναλήψεις της ανωτέρω μεθόδου για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$.

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(\frac{1}{2}x_n^2 - 1), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{2}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{2}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β)}.

1.5 **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^3(x-2)$, αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος **N-R** συγκλίνει στη ρίζα ξ=-1 της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια βελτιωμένη μορφή της μεθόδου **N-R** για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 0$.

γ) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της νέας μορφής της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.