

1^η ΑΣΚΗΣΗ

1. Θεωρία (Κεφ. 1, 2)

- 1.1 α) Σε πόσα σημαντικά ψηφία συμφωνούν οι αριθμοί $\sqrt{10002}$ και $\sqrt{10001}$;
β) Στο σύστημα αριθμών κινητής υποδιαστολής με $\beta = 10$, $n = 10$, $m = -98$, $M = 100$, να αφαιρεθεί το $\sqrt{10001}$ από το $\sqrt{10002}$. Πόσα σημαντικά ψηφία χάνονται κατά την αφαίρεση;
γ) Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσαμε να αναδιατάξουμε τους υπολογισμούς για να έχουμε μια πιο ακριβή απάντηση στο β).

- 1.2 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(x_n^2 - 5), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = x^2 - 5$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{5}$ της εξίσωσης :

- α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.
β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.
γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση: Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{5}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β).

- 1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x + 2)^3$, τότε

- α) να επιλέξετε και να εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου N-R για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = -1$.
β) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Υλοποίηση αλγορίθμων-Εφαρμογές

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις και τα αντίστοιχα διαστήματα $[a, b]$ στα οποία περιέχεται μία πραγματική τους ρίζα ξ .

$$\alpha) f_1(x) = x^4 - 18x^2 + 45, \quad [1, 2] \quad (\text{ή } \beta) f_2(x) = e^x + x^2 - x - 4, \quad [1, 2])$$

2.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) **μόνον** έναν από τους αλγορίθμους των επαναληπτικών μεθόδων :

(I) Newton-Raphson (N-R) ή (II) Τέμνουσας

για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_n της ρίζας $\xi \in [a, b]$ **μόνο μιας** από τις ανωτέρω συναρτήσεις.

Υπόδειξη: Οι τιμές των συναρτήσεων f και f' θα υπολογίζονται με την χρήση των συναρτήσεων $f(x)$ και $df(x)$, αντίστοιχα. Ως δεδομένα θα δίνονται η αρχική τιμή x_0 για την **(I)** (ή το ζεύγος αρχικών τιμών (x_0, x_1) για την **(II)**), η επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-6}$ και ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός επαναλήψεων maxiter .

2.2 Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο 2.1 να επαληθεύσετε πειραματικά την τάξη σύγκλισης p των επαναληπτικών μεθόδων **(I) ή (II)** στις ανωτέρω περιπτώσεις **\alpha) ή \beta)**.

Υπόδειξη: Η τάξη σύγκλισης είναι $p=2$ για την **N-R** και $p=(1+\sqrt{5})/2$ για την **Τέμνουσα**. Υπολογίστε την αντίστοιχη ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος c έτσι ώστε να επαληθεύεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = c, \quad \text{αν η ρίζα είναι γνωστή } (\xi = \sqrt{3}) \text{ (στο } \alpha)),$$

$$\text{ή } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p} = c, \quad \text{αν η ρίζα είναι άγνωστη (στο } \beta)).$$

2.3 Για την υλοποίηση των 2.1 και 2.2 να επιλεγούν (τρεις τουλάχιστον) διαφορετικές τιμές της αρχικής τιμής x_0 (ή των αρχικών τιμών (x_0, x_1)) και να συμπληρώσετε αντίστοιχα, τους παρακάτω πίνακες 1 ή 2 αποτελεσμάτων.

Πίνακες Αποτελεσμάτων
Πίνακας 1

(II) Τέμνουσας			
(x_0, x_1)	x_n	$f(x_n)$	n
(1,2)	67/39= 1.717948718	0.58619346	2
(2, 67/39)	$\frac{4220941}{2436725}$ = 1.732218859	-0.00698576	3
(67/39, 1.732218859	1.732050802	$0.22 \cdot 10^{-6}$	4
1.732218859 , 1.732050802	1.732050808	$-0.1 \cdot 10^{-7}$	5

Πίνακας 2

	(I) N-R $p = 2$		(II) Τέμνουσας $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	
	x_0	c	(x_0, x_1)	c
f_1				
f_2				

]

- 2.4 Να δικαιολογηθεί, με βάση τη θεωρία, η συμπεριφορά της σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων (I) ή (II).

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Άσκησης

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης :

Η **1η Άσκηση** θα παραδοθεί ως εξής :

Η **Θεωρία** θα παραδοθεί σε φάκελο στον οποίο θα αναγράφετε εξωτερικά (Α.Μ. και Ονοματεπώνυμο) και θα περιέχει συμπληρωμένο το **”Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων”**.

Χρησιμοποιήστε ένα έτοιμο αντίγραφο από το έντυπο (βλ. παρακάτω) και συμπληρώστε τις απαντήσεις σας όπως διευκολύνετε (χειρόγραφα ή ηλεκτρονικά).

Η υποβολή θα γίνει στο γραφείο Α35 του Α' Τομέα (κ. Φ. Τζαφέρης) τη **Δευτέρα 6.4.2009 και ώρα 11:00-16:00.**

Η **Υλοποίηση των αλγορίθμων-Εφαρμογές** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e_class** του μαθήματος μέχρι και τη **Παρασκευή 10/4/2009 και ώρα 24:00.**

Πρέπει να περιλαμβάνει:

- 1) τα αρχεία με όνομα **ask1_method_i_j** (.c ή .cpp) που το καθένα θα περιέχει μόνο τον **πηγαίο κώδικα** για την αντίστοιχη μέθοδο (όπου **method** το όνομα της μεθόδου (δηλ. NR ή TEM), **i** η ένδειξη του ερωτήματος (δηλ. 2.1 ή 2.2), **j** η ένδειξη της συνάρτησης (δηλ. a ή b) και
- 2) ένα μόνο **αρχείο κειμένου** με όνομα **ask1_apotel** (.doc σε word) για την περιγραφή των αλγορίθμων, την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων σας .

Χρησιμοποιήστε ένα έτοιμο αντίγραφο από το αρχείο word (βλ. e-class), στο οποίο περιέχονται η εκφώνηση καθώς και οι πίνακες αποτελεσμάτων για να τους συμπληρώσετε.

Στο μήνυμά σας(**e_mail** } το θέμα (subject) θα είναι μόνο : το ονοματεπώνυμο και ο ΑΜ σας (π.χ. Παναγιώτου Γ. 200500158).

Επίσης στο μήνυμά σας(**e_mail** } πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα ASK2_xxxxxxx.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο(source) κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (**κώδικα και κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.

Όροι αποδοχής της 1ης Ομάδας Ασκήσεων

Για να γίνει αποδεκτή για αξιολόγηση η εργασία σας θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα, διαφορετικά θα απορρίπτεται ως μη αποδεκτή:

- Η **1^η Άσκηση(1. Θεωρία και 2. Υλοποίηση Αλγορίθμων – Εφαρμογές)** να παραδοθεί εμπρόθεσμα σύμφωνα με τις προαναφερόμενες καταληκτικές ημερομηνίες.
- Σε κάθε συνημμένο αρχείο να γράφετε το ονόματεπώνυμό σας και τον ΑΜ (σαν σχόλιο στον κώδικα).
- Το **αρχείο κειμένου** (στο 2. Υλοποίηση Αλγορίθμων – Εφαρμογές) εκτός από το ονοματεπώνυμό σας θα περιέχει τα ακόλουθα:

- (i) *Εκφώνηση άσκησης* (έτοιμο αντίγραφο της εκφώνησης)
- (ii) *Ανάλυση – Σχεδιασμός* : Στην ενότητα αυτή θα περιγράψετε σύντομα τη μέθοδο λύσης του προβλήματος.
- (iii) *Αλγόριθμος*: Με βάση την ανάλυση-σχεδιασμό στο (ii) θα δώσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου επίλυσης του προβλήματός σας.
- (iv) *Υλοποίηση: Παρουσίαση του κώδικα*
- (v) *Αποτελέσματα* : Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσετε τα αποτελέσματα (και τα δεδομένα) για τρία τουλάχιστον τεστ του προγράμματός σας με διαφορετικά δεδομένα το καθένα.
- (vi) *Σχολιασμός*: Σχολιασμός των αποτελεσμάτων με βάση τη θεωρία.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- 1. Η Άσκηση είναι **ατομική** και σε περίπτωση αντιγραφής ή όμοιου κώδικα συνεπάγεται μηδενική βαθμολογία.
- 2. Η άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.
- 3. Επίσης, θα λαμβάνεται κυρίως υπόψη η αποτελεσματικότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται με βάση την ύλη που έχετε διδαχθεί.
- 4. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.
- 5. Η αποστολή μηνύματος σε άλλη διεύθυνση, εκτός αυτής που προαναφέρεται(δηλ. στην e_class), θα καταστήσει το μήνυμα απορριπτό χωρίς την ενημέρωσή σας.
- 6. Ο κώδικάς σας θα πρέπει να τρέχει στον μεταγλωττιστή της C (ή C++) του εργαστηρίου των PC,s.
- 9. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνετε με το σχετικό υλικό (Σημειώσεις, Διαφάνειες, Φροντιστηριακές Ασκήσεις, Ασκήσεις, Βαθμολογίες).

Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Θεωρία (Κεφ. 1, 2)

A.M

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

1.

2.

- 1.1**
- α) Σε πόσα σημαντικά ψηφία συμφωνούν οι αριθμοί $\sqrt{10002}$ και $\sqrt{10001}$;
 - β) Στο σύστημα αριθμών κινητής υποδιαστολής με $\beta = 10$, $n = 10$, $m = -98$, $M = 100$, να αφαιρεθεί το $\sqrt{10001}$ από το $\sqrt{10002}$. Πόσα σημαντικά ψηφία χάνονται κατά την αφαίρεση;
 - γ) Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσαμε να αναδιατάξουμε τους υπολογισμούς για να έχουμε μια πιο ακριβή απάντηση στο β).

1.2 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(x_n^2 - 5), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου

$f(x) = x^2 - 5$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{5}$ της εξίσωσης :

- α)** Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.
- β)** Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.
- γ)** Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση:
Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{5}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β).

1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x + 2)^3$, τότε

- α)** να επιλέξετε και εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου N-R για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = -1$.
- β)** Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΗ 1

2. Υλοποίηση αλγορίθμων-Εφαρμογές

Πίνακες Αποτελεσμάτων

Πίνακας 1

	(I) Newton-Raphson (N-R)				(II) Τέμνουσας			
	x_0	x_n	$f(x_n)$	n	(x_0, x_1)	x_n	$f(x_n)$	n
f_1								
f_2								

Πίνακας 2

	(I) N-R $p = 2$		(II) Τέμνουσας $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	
	x_0	c	(x_0, x_1)	c
f_1				
f_2				