

Πιθανότητες και στοιχεία Στατιστικής

Τεστ εξάσκησης

Ιανουάριος 2010

Σημείωση: Το πρώτο θέμα πιο κάτω θα 'πρεπε να έχει 3 βαθμούς. Στην εξέταση, το ανάλογο θέμα θα έχει δύο απο τα τρία ερωτήματα που υπάρχουν τώρα, και θα του αναλογούν 2 βαθμοί.

1. [2 Βαθμοί] (α) Απο μία κάλπη που περιέχει 100 σφαιρίδια αριθμημένα $\{1, 2, \dots, 100\}$, εξάγουμε το ένα μετά το άλλο στην τύχη με επανάθεση 10 σφαιρίδια. Ποιά η πιθανότητα τα πέντε πρώτα σφαιρίδια να φέρουν διαφορετικούς αριθμούς, και τα υπόλοιπα 5 να φέρουν αριθμούς διαφορετικούς απο αυτούς των πρώτων πέντε;

(β) Μια κάλπη A περιέχει 2 άσπρα και 8 μαύρα σφαιρίδια ενώ μια κάλπη B περιέχει 9 άσπρα και 1 μαύρο σφαιρίδιο. Επιλέγουμε με ίση πιθανότητα μια απο τις κάλπες A, B, και έπειτα πάλι με ίση πιθανότητα ένα απο τα 10 σφαιρίδια που η κάλπη περιέχει. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρο σφαιρίδιο;

(γ) Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές, και θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

A: Η πρώτη ρίψη φέρνει 1.

B: Δεν εμφανίζεται 2 σε κάποια ρίψη.

Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

2. [2 Βαθμοί] (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) := \begin{cases} xe^{-x} & \text{για } x > 0, \\ 0 & \text{για } x \leq 0. \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $3 < X < 7$ και η μέση τιμή της $1/X$.

(β) Έστω $p \in (0, 1)$, και Y διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = cp^x$ για $x \in \mathbb{N}$ με $x \geq 3$ και $f(x) = 0$ για όλα τα υπόλοιπα x . Να βρεθούν συναρτήσει του p η τιμή της σταθεράς c καθώς και η μέση τιμή της Y .

3. [2 Βαθμοί] Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{για } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(Y > X/2)$.

(β) Να υπολογισθεί η συνδιακύμανση των X, Y .

4. [1 Βαθμός] 100 φοιτητές παίρνουν μέρος σε μία εξέταση. Υποθέτουμε ότι οι βαθμολογίες που πετυχαίνουν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και έχουν όλες κοινή κατανομή με μέση τιμή 8 και διασπορά 1. Ποιά είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα ο μέσος όρος όλων των φοιτητών να είναι στο διάστημα $[7.9, 8.2]$; Δίνεται ότι $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(2) \approx 0.97$.

5. [2 Βαθμοί] Έστω X_1, X_2, \dots, X_n (ανεξάρτητο) δείγμα απο πληθυσμό που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \theta]$, όπου $\theta > 0$ άγνωστο.

(α) Ποιά είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $M := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$;

(β) Ποιά είναι η μέση τιμή της M ;

(γ) Για ποιά σταθερά c είναι η cM αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ ;

Υπόδειξη: Για το (α), υπολογίζουμε την συνάρτηση κατανομής $F(t) = P(M \leq t)$ της M , και παραγωγίζουμε ως προς t . Απο ανεξαρτησία,

$$P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) = P(X_1 \leq t) \cdots P(X_n \leq t) = \dots$$

6. [1 Βαθμός] Έστω X_1, X_2, \dots, X_n (ανεξάρτητο) δείγμα απο πληθυσμό που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\lambda > 0$. Δηλαδή πυκνότητα $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$. Να βρεθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha = 0.99$.

Το n είναι αρκετά μεγάλο. Δίνεται ότι η πιο πάνω εκθετική κατανομή έχει μέση τιμή $1/\lambda$ και διασπορά $1/\lambda^2$.

Απαντήστε σε όλα τα θέματα.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!