ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, 25 Ιανουαρίου 2005

Θέμα 1ο: Ας θεωρήσουμε δύο κληρωτίδες από τις οποίες η πρώτη περιέχει 10 σφαιρίδια φέροντα τους αριθμούς $\{1,2,...,10\}$ και η δεύτερη περιέχει 25 άσπρα και 25 μαύρα σφαιρίδια. Από την πρώτη κληρωτίδα εξάγουμε ένα σφαιρίδιο και στη συνέχεια από τη δεύτερη κληρωτίδα εξάγουμε με επανάθεση τόσα σφαιρίδια όσος είναι ο αριθμός που φέρει το εξαγόμενο από την πρώτη κληρωτίδα σφαιρίδιο. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως από τη δεύτερη κληρωτίδα (α) μη εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο, (β) εξαχθεί ένα τουλάχιστον άσπρο σφαιρίδιο και (γ) εξαχθούν μόνο σφαιρίδια του ιδίου χρώματος. Επίσης (δ) να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα να είχε εξαχθεί ο αριθμός 5 από την πρώτη κληρωτίδα δεδομένου ότι όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν από τη δεύτερη κληρωτίδα ήταν μαύρα.

Θέμα 2ο: Ο αριθμός των αιτήσεων για αποζημίωση που διεκπεραιώνει μία ασφαλιστική εταιρεία σε μία μέρα είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{(\nu+1)(\nu+2)}, \quad x = 0,1,...,\nu .$$

(α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες διεκπεραίωσης σε μία μέρα (β) τουλάχιστο $\kappa \le \nu$ αιτήσεων και (γ) περιττού αριθμού αιτήσεων στη μερική περίπτωση που $\nu = 2r+1$ περιττός αριθμός. Επίσης (δ) να υπολογισθεί ο μέσος αριθμός αιτήσεων που η εταιρεία διεκπεραιώνει σε μία μέρα.

Θέμα 3ο: (α) Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = 1/5$, $-1 \le x \le 4$ να υπολογισθούν (α_1) η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ και (α_2) η μέση τιμή $E(Y)$` της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$.

(β) Αν ο αριθμός X_1 των αιτήσεων για αναλυτική βαθμολογία που υποβάλλονται στη γραμματεία του τμήματος Πληροφορικής και Επικοινωνιών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 3 αιτήσεις ανά εβδομάδα, να υπολογισθούν οι πιθανότητες υποβολής (β_1) δύο τουλάχιστο αιτήσεων σε διάστημα δύο εβδομάδων και (β_2) μιας τουλάχιστο αίτησης σε κάθε μία από δύο συνεχόμενες εβδομάδες.

Θέμα 4ο: Ο χρόνος ζωής T σε χιλιάδες ώρες μιας ηλεκτρικής συσκευής είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = te^{-t^2/2}, \quad 0 < t < \infty .$$

(α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση κατανομής $F(t) = P(T \le t)$, $-\infty < t < \infty$.

Έστω ότι η κατασκευάστρια εταιρεία πωλεί τη συσκευή με κέρδος 200 € και δίνει στους πελάτες εγγύηση t_0 ωρών καλής λειτουργίας. Αν η συσκευή παρουσιάσει βλάβη πριν από τη λήξη της εγγύησης, επισκευάζεται από την εταιρεία. Το κόστος επισκευής, το οποίο επιβαρύνει την εταιρεία ανέρχεται σε 50 €. (β) Αν K είναι το κέρδος της εταιρείας ανά συσκευή να υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος $E(K)$. (γ) Να υπολογισθεί ο χρόνος εγγύησης t_0 έτσι ώστε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ανά συσκευή να είναι τουλάχιστο 175 €.

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2005

Θέμα 1ο: Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα. A_κ: να εξαχθεί ο αριθμός κ από την πρώτη κληρωτίδα, $\kappa = 1,2,\ldots,10$, B_0: να μη εξαχθεί άσπρο σφαιρίδιο από τη δεύτερη κληρωτίδα και Γ_0: να μη εξαχθεί μαύρο σφαιρίδιο από τη δεύτερη κληρωτίδα. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$P(A_\kappa) = \frac{1}{10},\ P(B_0 \mid A_\kappa) = P(\Gamma_0 \mid A_\kappa) = \frac{1}{2^\kappa},\ \kappa = 1,2,\ldots,10 .$$

(α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$P(B_0) = \sum_{\kappa=1}^{10} P(A_\kappa)P(B_0 \mid A_\kappa) = \frac{1}{10}\sum_{\kappa=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^\kappa = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right). \quad \textbf{(3 μ.)}$$

(β) $P(B_0') = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right).$ **(2 μ.)**

(γ) $P(B_0 + \Gamma_0) = P(B_0) + P(\Gamma_0) = 2P(B_0) = \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right).$ **(2 μ.)**

(δ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bayes παίρνουμε

$$P(A_5 \mid B_0) = \frac{P(A_5)P(B_0 \mid A_5)}{P(B_0)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)} = \frac{\frac{1}{2^5}}{1-\frac{1}{2^{10}}} = \frac{2^5}{2^{10}-1} \quad \textbf{(3 μ.)}$$

Θέμα 2ο: (α) $F(x) = 0$, $x < 0$, $F(x) = 1$, $x \ge \nu$, και σύμφωνα με το τύπο του αθροίσματος πεπερασμένου αριθμού όρων αριθμητικής προόδου,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]} f(k) = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{k=0}^{[x]}(k+1) = \frac{([x]+1)([x]+2)}{(\nu+1)(\nu+2)},\ 0 \le x < \nu, \quad \textbf{(3 μ.)}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

(β) $P(X \ge \kappa) = 1 - P(X \le \kappa - 1) = 1 - F(\kappa - 1) = 1 - \frac{\kappa(\kappa+1)}{(\nu+1)(\nu+2)},$ **(2 μ.)**

(γ) $$P_1 = \sum_{k=0}^{r} P(X = 2k+1) = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{k=0}^{r}(2k+2) = \frac{4}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{k=0}^{r}(k+1)$$

$$= \frac{2(r+1)(r+2)}{(\nu+1)(\nu+2)}. \quad \textbf{(2 μ.)}$$

(δ) $$E(X) = \sum_{x=1}^{\nu} xf(x) = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{x=1}^{\nu}x(x+1) = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}\left\{\sum_{x=1}^{\nu}x^2 + \sum_{x=1}^{\nu}x\right\}$$

$$= \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}\left\{\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\} = \frac{2\nu}{3}. \quad \textbf{(3 μ.)}$$

Θέμα 3ο: (α$_1$) Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$ είναι η

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y), \quad -\infty < y < \infty.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = f_X(y) + f(-y) = \begin{cases} 2/5, & 0 \le y \le 1 \\ 1/5, & 1 \le y \le 4, \end{cases} \qquad \textbf{(3 μ.)}$$

(α$_2$) Η μέση τιμή είναι

$$E(Y) = \int_0^4 y f_Y(y)dy = \frac{2}{5}\int_0^1 ydy + \frac{1}{5}\int_1^4 ydy = \left[\frac{y^2}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{10}\right]_1^4 = \frac{1}{5} + \frac{16-1}{10} = \frac{17}{10}. \ \textbf{(2 μ.)}$$

(β$_1$) Ο αριθμός X_2 των αιτήσεων σε διάστημα δύο εβδομάδων ακολουθεί την Poisson με συνάρτηση πιθανότητας $P(X_2 = x) = e^{-6}6^x / x!$, $x = 0,1,...$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X_2 \ge 2) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = 1 - e^{-6}\frac{6^0}{0!} - e^{-6}\frac{6^1}{1!} = 1 - 7e^{-6}. \quad \textbf{(3 μ.)}$$

(β$_2$) Έχουμε $P(X_1 = x) = e^{-3}e^x / x!$, $x = 0,1,...$ και έτσι

$$P(X_1 \ge 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - e^{-3}.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$[P(X_1 \ge 2)]^2 = (1-e^{-3})^2 = 1 - 2e^{-3} + e^{-6}. \qquad \textbf{(2 μ.)}$$

Θέμα 4ο: (α) $F(t) = 0$, $-\infty < t \le 0$ και

$$F(t) = \int_0^t xe^{-x^2/2}dx = [-e^{-x^2/2}]_0^t = 1 - e^{-t^2/2}, \ 0 < t < \infty. \qquad \textbf{(3 μ.)}$$

(β) Το κέρδος K είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές

$$K = \begin{cases} 150, & 0 < T \le t_0 \\ 200, & t_0 < T < \infty. \end{cases}$$

Επομένως

$$P(K = 150) = P(0 < T \le t_0) = F(t_0) - F(0) = 1 - e^{-t_0^2/2},$$

$$P(K = 200) = 1 - P(K = 150) = e^{-t_0^2/2}$$

και έτσι

$$E(K) = 150P(K = 150) + 200P(K = 200) = 150(1 - e^{-t_0^2/2}) + 200e^{-t_0^2/2}$$

$$E(K) = 150 + 50e^{-t_0^2/2}. \qquad \textbf{(4 μ.)}$$

(γ) Η συνθήκη $E(K) \ge 175$ συνεπάγεται διαδοχικά τις ανισότητες $150 + 50e^{-t_0^2/2} \ge 175$, $e^{-t_0^2/2} \ge 1/2$, $-t_0^2/2 \ge -\log 2$, $t_0^2 \le 2\log 2$,

και έτσι

$$t_0 \le \sqrt{2\log 2}. \qquad \textbf{(3)}$$