ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ» ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, 24 Ιανουαρίου 2006

Θέμα 1ο: Ας θεωρήσουμε έναν πομπό ο οποίος εκπέμπει υπό την ίδια αναλογία τα σήματα 0, 1 και 2. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως σε 6 εκπομπές σημάτων παρατηρηθούν μια τουλάχιστον φορά το καθένα (α) τα σήματα 1 και 2 και (β) και τα τρία σήματα 0, 1 και 2. Αν X είναι ο αριθμός εκπομπών του σήματος 0 σε 9 εκπομπές σημάτων ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X; δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Θέμα 2ο: Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό στον οποίο ο αριθμός των ανδρών προς τον αριθμό των γυναικών είναι θ. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ένας άνδρας να πάσχει από αχρωματοψία είναι q, ενώ η πιθανότητα μια γυναίκα να πάσχει από αχρωματοψία είναι q^2. (α) Έστω ότι ένα άτομο εκλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό. Να υπολογισθούν η πιθανότητα το εκλεγόμενο άτομο να πάσχει από αχρωματοψία και η δεσμευμένη πιθανότητα να είναι άνδρας δεδομένου ότι πάσχει από αχρωματοψία. (β) Έστω ότι δύο άτομα εκλέγονται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ένα τουλάχιστο να πάσχει από αχρωματοψία.

Θέμα 3ο: (α) Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο διακεκριμένων κύβων και έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία στο σημείο $\omega = (i, j)$ του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί το σημείο $x = i + j - 1$, $i = 1,2,...,6$, $j = 1,2,...,6$. Να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 1,2,...,11$.

(β) Αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = 1/3$, $-2 \le x \le 1$, να υπολογισθούν η συνάρτηση πυκνότητας, η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$.

Θέμα 4ο: Η ημερήσια ποσότητα αρτοσκευασμάτων X (σε εκατοντάδες κιλά) που πωλεί συγκεκριμένο κατάστημα είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx. & 0 \le x < 10 \\ c(20 - x), & 10 \le x < 20 \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x \ge 20. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η σταθερή c, (β) η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, και (γ) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα σε 2 ½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

1. (α) Έστω A_i το ενδεχόμενο μη εκπομπής του σήματος i, $i=0,1,2$. Τότε η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$P(A_1'A_2')=1-P(A_1)-P(A_2)+P(A_1A_2)=1-2\frac{2^6}{3^6}+\frac{1}{3^6}=\frac{729-128+1}{729}=\frac{602}{729}. \quad \textbf{(3μ)}$$

(β) Η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$P(A_0'A_1'A'_2)=1-\{P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)\}+\{P(A_0A_1)+P(A_0A_2)+P(A_1A_2)\}$$

$$-P(A_0A_1A_2)=1-3\frac{2^6}{3^6}+3\frac{1}{3^6}-0=\frac{729-192+3}{729}=\frac{540}{729}. \quad \textbf{(3μ)}$$

(γ) Αν θεωρήσουμε ως επιτυχία την εκπομπή του σήματος 0 και αποτυχία την εκπομπή είτε του σήματος 1 είτε του σήματος 2, τότε έχουμε το μοντέλο $\nu=9$ ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p=1/3$ και επομένως η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x)=P(X=x)=\binom{9}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x},\ x=0,1,...,9.$$

Η μέση τιμή της διωνυμικής κατανομής είναι $E(X)=\nu p$ και έτσι

$$E(X)=3. \quad \textbf{(4μ)}$$

2. (α) Έστω A το ενδεχόμενο το εκλεγόμενο άτομο να είναι άνδρας και B το ενδεχόμενο να πάσχει από αχρωματοψία. Τότε $N(A)=\theta N(A')$ και $P(A)=\theta P(A')$ και επειδή $P(A')=1-P(A)$ έχουμε $P(A)=\theta/(\theta+1)$ και $P(A')=1/(\theta+1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')=\frac{\theta q}{\theta+1}+\frac{q^2}{\theta+1}=\frac{q(\theta+q)}{\theta+1}. \quad \textbf{(4μ)}$$

(β) Σύμφωνα με το τύπο του Bayes

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')}=\frac{\theta q/(\theta+1)}{q(\theta+q)/(\theta+1)}=\frac{\theta}{\theta+q}. \quad \textbf{(2μ)}$$

(γ) Έστω B_i το ενδεχόμενο το i εκλεγόμενο άτομο να πάσχει από αχρωματοψία $i=1,2$. Τότε τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 είναι ανεξάρτητα και σύμφωνα με το (α) έχουμε

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{q(\theta+q)}{\theta+1}$$

και η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1)P(B_2)$$

$$=2\frac{q(\theta+q)}{\theta+1}-\left(\frac{q(\theta+q)}{\theta+1}\right)^2=1-\left(1-\frac{q(\theta+q)}{\theta+1}\right)^2. \quad \textbf{(4μ)}$$

3. (α) $P(X=1)=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}$, $P(X=2)=P(\{(1,2),(2,1)\})=\frac{2}{36}$,

$P(X=3)=P(\{(1,3),(3,1),(2,2)\})=\frac{3}{36}$. $P(X=4)=P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\})=\frac{4}{36}$,

$P(X=5)=P(\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\})=\frac{5}{36}$

$P(X=6)=P(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\})=\frac{6}{36}$,

$P(X=7)=P(\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\})=\frac{5}{36}$

$P(X=8)=P(\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\})=\frac{4}{36}$, $P(X=9)=P(\{(4,6),(6,4),(5,5)\})=\frac{3}{36}$

$P(X=10)=P(\{(5,6),(6,5)\})=\frac{2}{36}$, $P(X=11)=P(\{(6,6)\})=\frac{1}{36}$

και έτσι

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\frac{x}{36}, & x=1,2,\ldots,6\\ \frac{12-x}{36}, & x=7,8,\ldots,11\end{cases} \qquad \textbf{(4μ)}$$

(β) Η τυχαία μεταβλητή $Y=|X|$ είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,\ 2]$ και η συνάρτηση πυκνότητας υπολογίζεται ως εξής:

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(-y)+f_X(y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, & 0\le y\le 1\\ f_X(-y)+f_X(y)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}, & 1<y\le 2\end{cases} \qquad \textbf{(3μ)}$$

Επίσης

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy=\frac{2}{3}\int_0^1 ydy+\frac{1}{3}\int_1^2 ydy=\left[\frac{y^2}{3}\right]_0^1+\left[\frac{y^2}{6}\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2dy+\frac{1}{3}\int_1^2 y^2dy=\left[\frac{2y^3}{9}\right]_0^1+\left[\frac{y^3}{9}\right]_1^2=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=1$$

και

$$V(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}. \qquad \textbf{(3μ)}$$

4. (α) Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^{10} xdx + c\int_{10}^{20}(20-x)dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} - c\left[\frac{(20-x)^2}{2}\right]_{10}^{20} = 100c = 1$$

και έτσι

$$c = \frac{1}{100}. \qquad \textbf{(2μ)}$$

(β) Η συνάρτηση κατανομής είναι: $F(x) = 0$, $-\infty < x < 0$, $F(x) = 1$, $20 \le x < \infty$ και

$$F(x) = \frac{1}{100}\int_0^x tdt = \left[\frac{t^2}{200}\right]_0^x = \frac{x^2}{200},\ 0 \le x < 10,$$

$$F(x) = \frac{1}{100}\int_0^{10} tdt + \frac{1}{100}\int_{10}^{x}(20-t)dt = \left[\frac{t^2}{200}\right]_0^{10} - \left[\frac{(20-t)^2}{200}\right]_{10}^{x},$$

$$= 1 - \frac{(20-x)^2}{200},\ 10 \le x < 20.$$

Συνοπτικά

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{200}, & 0 \le x < 10 \\ 1 - \dfrac{(20-x)^2}{200}, & 10 \le x < 20 \\ 1, & 20 \le x < \infty \end{cases} \qquad \textbf{(4μ)}$$

(γ)

$$E(X) = \frac{1}{100}\int_0^{10} x^2 dx + \frac{1}{5}\int_{10}^{20} xdx - \frac{1}{100}\int_{10}^{20} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{300}\right]_0^{10} + \left[\frac{x^2}{10}\right]_{10}^{20} - \left[\frac{x^3}{300}\right]_{10}^{20} = 10,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{100}\int_0^{10} x^3 dx + \frac{1}{5}\int_{10}^{20} x^2 dx - \frac{1}{100}\int_{10}^{20} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{400}\right]_0^{10} + \left[\frac{x^3}{15}\right]_{10}^{20} - \left[\frac{x^4}{400}\right]_{10}^{20} = \frac{350}{3}$$

και

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{350}{3} - 100 = \frac{50}{3}. \qquad \textbf{(4μ)}$$