ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, 25 Φεβρουαρίου 2004

Θέμα 1ο: Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει μία συγκεκριμένη εταιρεία προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπτήρων. Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο το οποίο περιέχει 2 ελαττωματικούς λαμπτήρες εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 λαμπτήρες. Έστω A_ν το ενδεχόμενο εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα στην ν-οστή εξαγωγή, $\nu = 1,2,3$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) $P(A_2)$, $P(A_1 \mid A_2)$, $P(A_2 - A_1)$ και (β) $P(A_3)$.

Θέμα 2ο: Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο διακεκριμένων κύβων και έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία στο σημείο $\omega = (i, j)$ του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί το σημείο $x = |i - j|$, $i = 1,2,...,6$, $j = 1,2,...,6$. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 0,1,...,5$, (β) η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$ και (γ) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

Θέμα 3ο: Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με $f_X(x) = 1$, $0 < x < 1$ και $Y = -2\log(1 - X)$, όπου ο λογάριθμος νοείται με βάση το e. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ και (β) η μέση τιμή $E(Y)$ και η διασπορά $V(Y)$ (**υπολογίζοντας** τα σχετικά ολοκληρώματα).

Θέμα 4ο: Μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος X σε χιλιοστόμετρα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 40$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$. Αν το μήκος μιας βίδας είναι εκτός του διαστήματος $[39, 41]$, η βίδα θεωρείται ελαττωματική. Να υπολογισθούν (α) το ποσοστό των ελαττωματικών βίδων που παράγει η μηχανή, (β) η πιθανότητα σε μια τυχαία επιλογή 4 βίδων μια το πολύ είναι ελαττωματική. (γ) Χρησιμοποιώντας κατάλληλη προσέγγιση να υπολογισθεί η πιθανότητα σε μια τυχαία επιλογή 20 βίδων 2 τουλάχιστο βίδες είναι ελαττωματικές.

[Δίνονται: $\Phi(0,5) = 0,69$, $\Phi(1) = 0,85$, $e^{-3} = 0,05$, $e^{-6} = 0,0025$]

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα σε 2 1/2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2004

Θέμα 1. (α) Σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(A_1')P(A_2\mid A_1')=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}+\frac{23}{25}\cdot\frac{2}{24}=\frac{2(1+23)}{25\cdot 24}=\frac{2}{25}.$$

(3 μ.)

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes, παίρνουμε

$$P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_1)P(A_2\mid A_1)}{P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(A_1')P(A_2\mid A_1')}=\frac{\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}}{\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}+\frac{23}{25}\cdot\frac{2}{24}}=\frac{\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}}{\frac{2}{25}}=\frac{1}{24}.$$

(2 μ.)

Επειδή $A_2-A_1=A_1'\cap A_2$, χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο, παίρνουμε

$$P(A_2-A_1)=P(A_1'\cap A_2)=P(A_1')P(A_2\mid A_1')=\frac{23}{25}\cdot\frac{2}{24}=\frac{23}{300}.$$

Εναλλακτικά

$$P(A_2-A_1)=P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=P(A_2)-P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{2}{25}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}=\frac{23}{300}.$$

(2μ.)

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1A_2')P(A_3\mid A_1A_2')$$
$$+P(A_1'A_2)P(A_3\mid A_1'A_2)+P(A_1'A_2')P(A_3\mid A_1'A_2'),$$

και ακολούθως τον πολλαπλασιαστικό τύπο, παίρνουμε,

$$P(A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1)P(A_2'\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2')$$
$$+P(A_1')P(A_2\mid A_1')P(A_3\mid A_1'A_2)+P(A_1')P(A_2'\mid A_1')P(A_3\mid A_1'A_2')$$
$$=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{0}{23}+\frac{2}{25}\cdot\frac{23}{24}\cdot\frac{1}{23}+\frac{23}{25}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{1}{23}+\frac{23}{25}\cdot\frac{22}{24}\cdot\frac{2}{23}=\frac{2(1+1+22)}{25\cdot 24}=\frac{2}{25}$$ **(3 μ.)**

Θέμα 2. (α) Χρησιμοποιώντας το δειγματικό χώρο $\Omega=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$ με τα $N(\Omega)=36$ ισοπίθανα δ. σ. και τον ορισμό $f(x)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x\})$, παίρνουμε

$$f(x)=\begin{cases}6/36, & x=0\\ 10/36, & x=1\\ 8/36, & x=2\\ 6/36, & x=3\\ 4/36, & x=4\\ 2/36, & x=5\end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & x=0\\ \frac{6-x}{18}, & x=1,2,3,4,5\end{cases}$$ **(3 μ.)**

(β) Χρησιμοποιώντας την έκφραση $F(x)=\sum_{\kappa=0}^{[x]} f(\kappa)$ συνάγουμε τη συνάρτηση κατανομής

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 6/36, & 0 \le x < 1 \\ 16/36, & 1 \le x < 2 \\ 24/36, & 2 \le x < 3 \\ 30/36, & 3 \le x < 4 \\ 34/36, & 4 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x < \infty \end{cases} \qquad \textbf{(3 μ.)}$$

(γ)

$$E(X)=\sum_{x=1}^{5} xf(x)=\frac{1\cdot 10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4+5\cdot 2}{36}=\frac{70}{36}=\frac{35}{18},$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{5} x^2 f(x)=\frac{1^2\cdot 10+2^2\cdot 8+3^2\cdot 6+4^2\cdot 4+5^2\cdot 2}{36}=\frac{210}{36}=\frac{105}{18},$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{105}{18}-\left(\frac{35}{18}\right)^2=\frac{665}{324}. \qquad \textbf{(4 μ.)}$$

Θέμα 3. (α) Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y=-2\log(1-X)$ συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X ως εξής: Αν $y>0$,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P[-2\log(1-X)\le y]=P[\log(1-X)\ge -y/2]$$
$$=P[1-X\ge e^{-y/2}]=P[X\le 1-e^{-y/2}]=F_X(1-e^{-y/2}),$$

ενώ αν $y\le 0$, $F_Y(y)=0$. Όμως

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ \int_0^x f_X(t)dt = x, & 0<x<1 \\ 1, & 1\le x<\infty \end{cases}$$

και έτσι

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ 1-e^{-y/2}, & y>0 \end{cases}, \qquad f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0 \end{cases} \qquad \textbf{(5 μ.)}$$

(β)

$$E(Y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty ye^{-y/2}dy=2\int_0^\infty ze^{-z}dz=-2\int_0^\infty zde^{-z}=-2\left[ze^{-z}\right]_0^\infty+2\int_0^\infty e^{-z}dz$$
$$=-2\left[ze^{-z}\right]_0^\infty-2\left[e^{-z}\right]_0^\infty=2,$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^2e^{-y/2}dy=4\int_0^\infty z^2e^{-z}dz=-4\int_0^\infty z^2de^{-z}=-4\left[z^2e^{-z}\right]_0^\infty+8\int_0^\infty ze^{-z}dz$$
$$=-4\left[z^2e^{-z}\right]_0^\infty-8\left[ze^{-z}\right]_0^\infty-8\left[e^{-z}\right]_0^\infty=8,$$

$$V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=8-4=4. \qquad \textbf{(5 μ.)}$$

Θέμα 4. (α) Η τ.μ. $Z = (X - 40)/1$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή και έτσι

$$p \equiv 1 - P(39 \le X \le 41) = 1 - P(-1 \le Z \le 1) = 1 - [\Phi(1) - \Phi(-1)]$$
$$= 2[1 - \Phi(1)] = 2(1 - 0{,}85) = 0{,}3, \qquad \textbf{(3 μ.)}$$

(β) Αν Y_4 είναι ο αριθμός των ελαττωματικών βίδων ανάμεσα σε 4 βίδες, τότε

$$P(Y_4 = y) = \binom{4}{y}(0{,}3)^y (0{,}7)^{4-y}, \ y = 0, 1, 2, 3, 4$$

και έτσι η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$P(Y_4 \le 1) = P(Y_4 = 0) + P(Y_4 = 1) = (0{,}7)^4 - 4(0{,}3)(0{,}7)^3 . \qquad \textbf{(3 μ.)}$$

(γ) Ο αριθμός Y_{20} των ελαττωματικών βίδων ανάμεσα σε 20 βίδες ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή:

$$P(Y_{20} = y) = \binom{20}{y}(0{,}3)^y (0{,}7)^{20-y}, \ y = 0, 1, ..., 20 .$$

Επειδή $\nu \ge 20$ και $p \le 10/20$, η κατανομή αυτή προσεγγίζεται από τη Poisson με $\lambda = \nu p = 20 \cdot 0{,}3 = 6$:

$$P(Y_{20} = y) \cong e^{-6} \frac{6^y}{y!}, \ y = 0, 1, ...$$

και έτσι

$$P(Y_{20} \ge 2) = 1 - P(Y_{20} = 0) - P(Y_{20} = 1) = 1 - 7e^{-6}$$
$$= 1 - 7(0{,}0025) = 1 - 0{,}0175 = 0{,}9825 . \qquad \textbf{(4 μ.)}$$