ΘΕΜΑ 1. (1 μονάδα)

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το σήμα $x(t)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$X(\omega) = 2T\,\mathrm{sinc}\frac{(\omega - \omega_0)T}{\pi} + 2T\,\mathrm{sinc}\frac{(\omega + \omega_0)T}{\pi}$$

όπου ω_0 και T είναι πραγματικές σταθερές.

ΘΕΜΑ 2. (1 μονάδα)
Δίνεται το αιτιατό σύστημα του οποίου η διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει το σήμα εισόδου και εξόδου.

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

2α) Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
2β) Αν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = e^{-2t}\,u(t)$$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$, όταν η αρχική συνθήκη στην οποία βρίσκεται το σήμα εξόδου του συστήματος είναι $y(0^{-}) = -1$.

ΘΕΜΑ 3. (1 μονάδα)
Δίνεται το αιτιατό σύστημα το οποίο έχει πόλους τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $2 \pm 3j$ και μηδενικό τον πραγματικό αριθμό -1

3α) Είναι το σύστημα ευσταθές;

3β) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

ΘΕΜΑ 4. (1 μονάδα)
Αν η είσοδός ενός ΓΧΑ συστήματος είναι το σήμα $x(t) = u(t)$, η έξοδός του είναι το σήμα $y(t) = e^{-t}u(t)$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδός του είναι το σήμα

$$x(t) = u(t-2) - u(t-1)$$

ΘΕΜΑ 5. (1 μονάδες)
Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{με πεδίο σύγκλισης } \Re e\{s\} < -1$$

5α) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.
Αν στην είσοδο του συστήματος εφαρμοστεί το σήμα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

5β) Να βρεθεί το σήμα εξόδου του συστήματος.

ΘΕΜΑ 6.
Δίνεται το σήμα $x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ όπου T είναι πραγματική θετική σταθερά, του οποίου η ενέργεια είναι ίση με 4 μονάδες ενέργειας.
6α) Να βρεθεί η σταθερά T.
6β) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)$.

ΘΕΜΑ 6.

Δίνεται το σήμα $x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ όπου T είναι πραγματική θετική σταθερά, του οποίου η ενέργεια είναι ίση με 4 μονάδες ενέργειας.

6α) Να βρεθεί η σταθερά *T*.

6β) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος *x*(*t*).

Απάντηση:

6α) Η σταθερά T είναι

$$T = 2 \text{ μονάδες ενέργειας}$$

6β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος *x*(*t*) είναι

$$R_x(\tau) = 2T\,\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$

ΘΕΜΑ 6.

Δίνεται το σήμα $x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ όπου T είναι πραγματική θετική σταθερά, του οποίου η ενέργεια είναι ίση με 4 μονάδες ενέργειας.

6α) Να βρεθεί η σταθερά *T*.

6β) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)$.

Λύση:

6α) Η ενέργεια του σήματος είναι

$$\mathrm{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-T}^{T} 1\,dt = 2T$$

και επειδή η ενέργεια είναι ίση με 4 μονάδες ενέργειας η σταθερά T είναι

$$T = 2 \text{ μονάδες χρόνου}$$

6β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)$ είναι

$$R_X(\tau) = F^{-1}\left[|X(\omega)|^2\right] = F^{-1}\left[\left|4T^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)\right|^2\right]$$

$$= F^{-1}\left[\left|2T2T\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega 2T}{2\pi}\right)\right|^2\right]$$

$$= 2TF^{-1}\left[\left|T_1 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)\right|^2\right]$$

$$= 2T\,\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2T}, & 2T < t < 2T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$R_x(\tau) = 2T\,\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{E}_x = R_x(0) = 2T = 4 \Rightarrow T = 2$

ΘΕΜΑ 7. (1,5 μονάδες)

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

***i*)** Όταν η είσοδός είναι το σήμα $x(t)=e^{2t}$ η έξοδός του είναι το σήμα $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$ για κάθε τιμή του χρόνου t.

***ii*)** Η κρουστική απόκριση του συστήματος ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\,h(t)}{d\,t}+2\,h(t)=e^{-4t}u(t)+b\,u(t)$$

όπου b είναι άγνωστη σταθερά. Να δείξετε ότι

7α) $b=1$ και να υπολογίσετε

7β) τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$ και

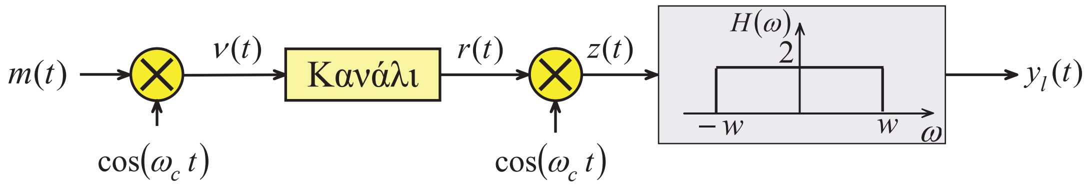
7γ) την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

ΘΕΜΑ 8. (1 μονάδα)

Να υπολογιστούν η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού, η φασματική πυκνότητα ενέργειας και η ενέργεια του σήματος $x(t) = 3\,e^{-2(t-1)}\,u(t-1)$

ΘΕΜΑ 9. (1,5 μονάδες)
Στην είσοδο της διάταξης του σχήματος εφαρμόζεται σήμα $m(t)$ του οποίου το φάσμα είναι

$$M(\omega) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\omega|}{W_1}, & |\omega| \le W_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Να σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων, $m(t)$, $r(t)$, $z(t)$ και $y_l(t)$.
Δίνεται ότι το κανάλι δεν προκαλεί αλλοίωση του σήματος εισόδου, δηλαδή, $r(t) = v(t)$ και ότι $W_1 < W << \omega_c$