Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2003 στο μάθημα Σήματα και Συστήματα και Λύσεις

ΘΕΜΑ 1. (3 μονάδες)
Έστω το αιτιατό σύστημα

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t} + 3\,y(t) = 2\,x(t)$$

όπου $x(t)$ η είσοδος και $y(t)$ η έξοδος του συστήματος.
1α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
1β) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα Bode.
1γ) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος για είσοδο

$$x(t) = e^{-t}\,u(t)$$

όπου $u(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.
1δ) Να υλοποιήσετε διαγραμματικά το σύστημα χρησιμοποιώντας αθροιστές πολλαπλασιαστές και ολοκληρωτές.

Λύση

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής του απόκρισης $h(t)$, δηλαδή, $H(s) = L\{h(t)\}$ Επίσης η απόκριση συχνότητας $H(w)$ ενός συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης $h(t)$, δηλαδή, $H(w) = F\{h(t)\}$.

1α) Εφαρμόζοντας ML και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και διαφόρισης έχουμε

$$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 3L\{y(t)\} = 2L\{x(t)\} \Rightarrow s\,Y(s) + 3Y(s) = 2\,X(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{2}{s+3}$$

Παρατηρούμε ότι έχει πόλο στο σημείο -3 και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό το πεδίο σύγκλισης είναι $\Re e\{s\} > -3$.

Επειδή στο πεδίο σύγκλισης περιέχεται ο φανταστικός άξονας του μιγαδικού επιπέδου η απόκριση συχνότητας βρίσκεται εύκολα ως

$$H(w) = H(s)\big|_{s=jw} \quad \Rightarrow \quad H(w) = \frac{2}{jw+3}$$

Σημείωση

Η απόκριση συχνότητας βρίσκεται και εφαρμόζοντας MF και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και διαφόρισης έχουμε

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 3F\{y(t)\} = 2F\{x(t)\} \Rightarrow jw\,Y(w) + 3Y(w) = 2\,X(w)$$

έτσι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \Rightarrow H(w) = \frac{2}{3+jw}$$

1β) Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι

$$|H(w)| = \sqrt{\frac{2}{3+jw}\cdot\frac{2}{3-jw}} = \sqrt{\frac{4}{9+w^2}} \Rightarrow |H(w)| = \frac{2}{\sqrt{9+w^2}}$$

και σε dB

$$20\log_{10}|H(w)| = 20\log_{10} 2 - 10\log_{10}(9+w^2)$$

στις χαμηλές συχνότητες έχουμε

$$20\log_{10}|H(w)| \approx 20\log_{10} 2 - 10\log_{10} 9 = 20\left(\log_{10} 2 - \log_{10} 3\right) = 20\log_{10}\frac{2}{3}$$

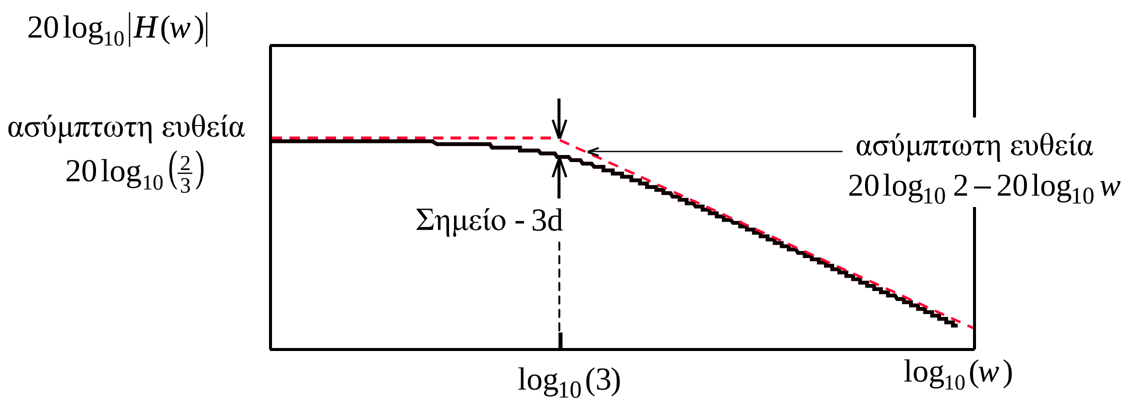
ενώ στις υψηλές συχνότητες έχουμε

$$20\log_{10}|H(w)| \approx 20\log_{10} 2 - 20\log_{10} w$$

Για το σημείο -3dB έχουμε

$$20\log_{10} 2 - 20\log_{10} w = 20\log_{10} 2 - 20\log_{10} 3 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} w = \log_{10} 3$$

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το διάγραμμα Bode.



Σχήμα 1 Το διάγραμμα Bode στο Θέμα 1.

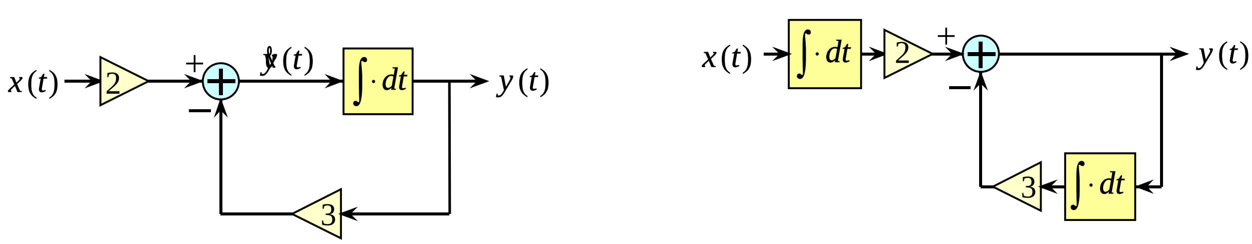
1γ) Όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \quad X(w) = \frac{1}{1+jw}$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου είναι

$$Y(w) = H(w)\cdot X(w) = \frac{2}{3+jw}\cdot\frac{1}{1+jw} \quad \Rightarrow \quad Y(w) = \frac{2}{(3+jw)(1+jw)}$$

1δ) Στο Σχήμα 2α υπάρχει η διαγραμματική υλοποιήση του συστήματος η οποία χρησιμοποιεί ένα αθροιστή δύο πολλαπλασιαστές και ένα ολοκληρωτή. Στο Σχήμα 2β υπάρχει εναλλακτική υλοποίησης του συτήματος η οποία απερρέει αν ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση. Η υλοποίηση αυτή έχει ένα ολοκληρωτή περισσότερο από την πρώτη υλοποίηση.



(α) (β)

Σχήμα 2 Διαγραμματικές υλοποίησεις του συστήματος στο Θέμα 1.

ΘΕΜΑ 2. (2 μονάδες)

2α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$y(n) - 2{,}5\, y(n-1) + y(n-2) = 1{,}4\, x(n)$$

όπου $x(n)$ η είσοδος και $y(n)$ η έξοδος.

2β) Επίσης να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση. Ποια αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα;

2γ) Να δώσετε διαγραμματική αναπαράσταση του παραπάνω φίλτρου.

Λύση

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός διακριτού συστήματος είναι ο μετασχηματισμός z της κρουστικής του απόκρισης $h(n)$, δηλαδή, $H(z) = z\{h(t)\}$.

2α) Εφαρμόζοντας Mz και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της χρονικής ολίσθησης έχουμε

$$Y(z) - 2{,}5\, z^{-1}\, Y(z) + z^{-2}\, Y(z) = 1{,}4\, X(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1 - 2{,}5\, z^{-1} + z^{-2}\right) = 1{,}4\, X(z)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος διακριτού χρόνου είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{1{,}4}{z^{-2} - 2{,}5\, z^{-1} + 1}$$

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι $1/2$ και 2 και τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$, $1/2 < |z| < 2$ και $2 < |z|$.

2β) Αναλύουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος σε απλά κλάσματα

$$H(z) = \frac{1{,}4}{\left(z^{-1} - 2\right)\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{14}{15}\frac{1}{z^{-1} - 2} - \frac{14}{15}\frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{2}} = -\frac{7}{15}\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{28}{15}\frac{1}{1 - 2\, z^{-1}}$$

i) Αν η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 2$ (το σύστημα είναι αιτιατό) η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n) = -\tfrac{7}{15}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \tfrac{28}{15} \cdot 2^n u(n) \;\text{ ή }\; h(n) = -0{,}466\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + 1{,}866 \cdot 2^n u(n)$$

ii) Αν η περιοχή σύγκλισης είναι $1/2 < |z| < 2$ (το σύστημα είναι ευσταθές αφού στο πεδίο σύγκλισης περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος) η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n) = -\tfrac{7}{15}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - \tfrac{28}{15}(2)^n u(-n-1)$$

iii) Αν η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$ η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n) = \tfrac{7}{15}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - \tfrac{28}{15}(2)^n u(-n-1)$$

Σημείωση

Αν η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γραφεί ως

$$H(z) = \frac{1{,}4\, z^2}{z^2 - 2{,}5\, z + 1}$$

τότε το κλάσμα αυτό δεν αναλύεται σε απλά κλάσματα επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή. Αναλύουμε σε απλά κλάσματα την ποσότητα

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1{,}4\, z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)} = -\frac{7}{15}\frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{28}{15}\frac{1}{z - 2}$$

και έτσι έχουμε

$$H(z) = -\frac{7}{15}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{28}{15}\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

Αν δεν χρησιμοποιηθεί η παραπάνω μεθοδολογία τότε πρέπει να κάνουμε διαίρεση οπότε έχουμε

$$H(z) = 1{,}4 + \frac{3{,}5z - 1{,}4}{z^2 - 2{,}5z + 1} = 1{,}4 + \frac{3{,}5z - 1{,}4}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)} = 1{,}4 - \frac{7}{30}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{112}{30}\frac{1}{z-2}$$

Γνωρίζουμε $x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$. Λόγω της ιδιότητας $x(n-1) \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z)$ έχουμε

$$x(n-1) = a^{n-1}u(n-1) \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z-a} \quad |z| > |a|$$

και για το αυστηρά μη αιτιατό εκθετικό σήμα για το οποίο

$$x(n) = -a^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a|$$

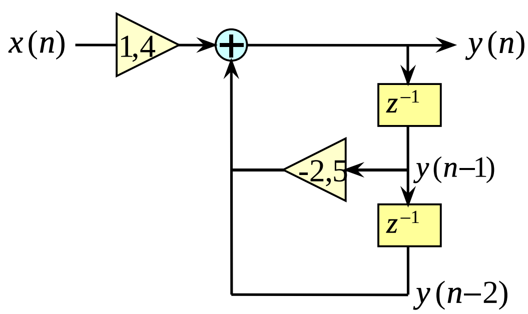
λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης έχουμε

$$x(n-1) = -a^{n-1}u(-n) \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z-a} \quad |z| < |a|$$

Τώρα η κρουστική απόκριση του ευσταθούς συστήματος διακριτού χρόνου είναι

$$h(n) = 1{,}4d(n) - \tfrac{7}{30}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1) - \tfrac{112}{30}(2)^{n-1}u(-n)$$

2γ) Η διαγραμματική αναπαράσταση του φίλτρου είναι στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 Η υλοποίηση του φίλτρου του Θέματος 2.

ΘΕΜΑ 3. (1,5 μονάδες)

Δίνεται ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του οποίου όταν η είσοδος είναι το σήμα $x(t) = \sqrt{3}d(t)$ τότε η έξοδος είναι το σήμα

$$y(t) = 2e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}t}u(t)$$

όπου $u(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

3α) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x_1(t) = 2\sin\left(2t + \tfrac{p}{3}\right)$$

3β) Επίσης να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier της εξόδου και να σχεδιαστεί το μέτρο τους.

Λύση

3α) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ συστήματος, είναι η έξοδός του, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $d\,(t)$, δηλαδή, $h(t) = S\{d\,(t)\}$. Έτσι η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}t}\, u(t) \;\text{ ή }\; h(t) = a\, e^{-at} u(t) \;\text{ όπου }\; a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

και η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H\,(w) = \frac{a}{a + jw} \quad \text{ή} \quad H\,(w) = \frac{2}{2 + j\sqrt{3}w}$$

Σημείωση

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος μπορεί να βρεθεί και με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης ως

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \sqrt{3}d\,(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X\,(w) = \sqrt{3} \\ y\,(t) = 2e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}t}\, u\,(t) \xleftrightarrow{F} Y\,(w) = \dfrac{2}{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\, jw} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; H\,(w) = \frac{Y\,(w)}{X\,(w)} \;\Rightarrow\; H\,(w) = \frac{2}{2 + j\sqrt{3}w}$$

3β) Επειδή η είσοδος του συστήματος είναι σήμα μιας συχνότητας η έξοδος βρίσκεται με τη βοήθεια της

$$y_1(t) = |H\,(w)|\, A \sin(w_0 t + j + \arg H\,(w_0))$$

Η συχνότητα του σήματος εισόδου είναι $\omega_0 = 2$. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος για $\omega_0 = 2$ είναι

$$H(2) = \frac{2}{2 + j\sqrt{3}\,2} \quad \text{ή} \quad H(2) = \frac{1}{4}\left(1 - j\sqrt{3}\right)$$

η οποία σε πολική μορφή γράφεται

$$H(2) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι

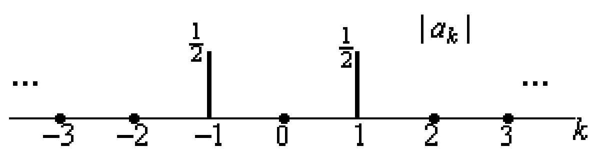
$$y_1(t) = \sin(2t)$$

Σημείωση

Η εύρεση της εξόδου του συστήματος με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και του θεωρήματος της συνέλιξης δεν ενδείκνυται.

Η εύρεση της εξόδου με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace και του θεωρήματος της συνέλιξης είναι αρκετά επίπονη.

3γ) Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier προσδιορίζονται όπως στο Παράδειγμα 3.5. Στο Σχήμα 4 έχει σχεδιαστεί το μέτρο τους.



Σχήμα 4 Το μέτρο των συντελεστών Fourier της εξόδου του συστήματος στο Θέμα 3.

ΘΕΜΑ 4. (2 μονάδες)

Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο αιτιατό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

όπου $u(n)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Η αρχική συνθήκη του συστήματος είναι $y(-1) = 2$.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ο μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, δηλαδή,

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 u(n) \xleftrightarrow{z} H(z) = \frac{1}{1-1/3\, z^{-1}} \quad \text{με πεδίο σύγκλισης } |z| > \frac{1}{3}$$

Επειδή το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες, για να προσδιορίσουμε την έξοδό του, θα πρέπει αφού πρώτα προσδιοριστεί η εξίσωση διαφορών που το χαρακτηρίζει να ενσωματώσουμε την αρχική συνθήκη στην εξίσωση, με τη βοήθεια του μονόπλευρου μετασχηματισμού z, και έτσι να βρεθεί η έξοδος.

Γνωρίζουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}\right) = X(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) = X(z)$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκεται η εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) = x(n)$$

Εφαρμόζουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό z και λαμβάνοντας υπ΄όψιν την αρχική συνθήκη έχουμε

$$Y^+(z) - \frac{1}{3}\left[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)\right] = X^+(z)$$

ή

$$Y^+(z)\left(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{3}\,\frac{3-z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

τελικά

$$Y^+(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό z υπολογίζεται η έξοδος του συστήματος

$$y(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Σημείωση

Αν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία τότε η λύση θα είναι

$$h(n) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$x(n)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

Ο μετασχηματισμός z της εξόδου του συτήματος είναι

$$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

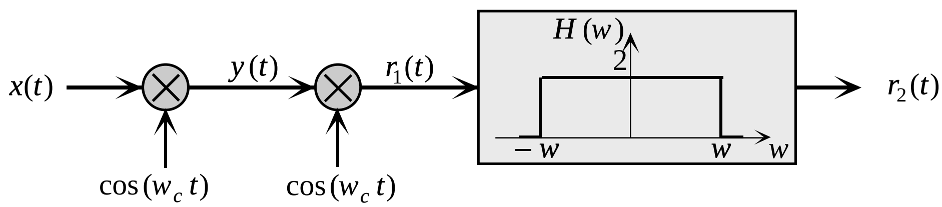
με πεδίο σύγκλισης την τομή των αντιστοίχων, δηλαδή, $|z|>\frac{1}{2}$. Η έξοδός του τώρα είναι

$$y(n)=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

που είναι διαφορετική από τη λύση με αρχική συνθήκη.

ΘΕΜΑ 5. (1,5 μονάδα)

Δίνεται η διάταξη που περιγράφεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4 Η διάταξη του Θέματος 5.

Στην είσοδο της διάταξης εφαρμόζεται σήμα του οποίου το φάσμα είναι

$$X(w)=\begin{cases}1-\dfrac{|w|}{W_1}, & |w|\le W_1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων $y(t)$, $r_1(t)$ και $r_2(t)$. Δίνεται ότι $W_1<W<<w_c$.

Λύση

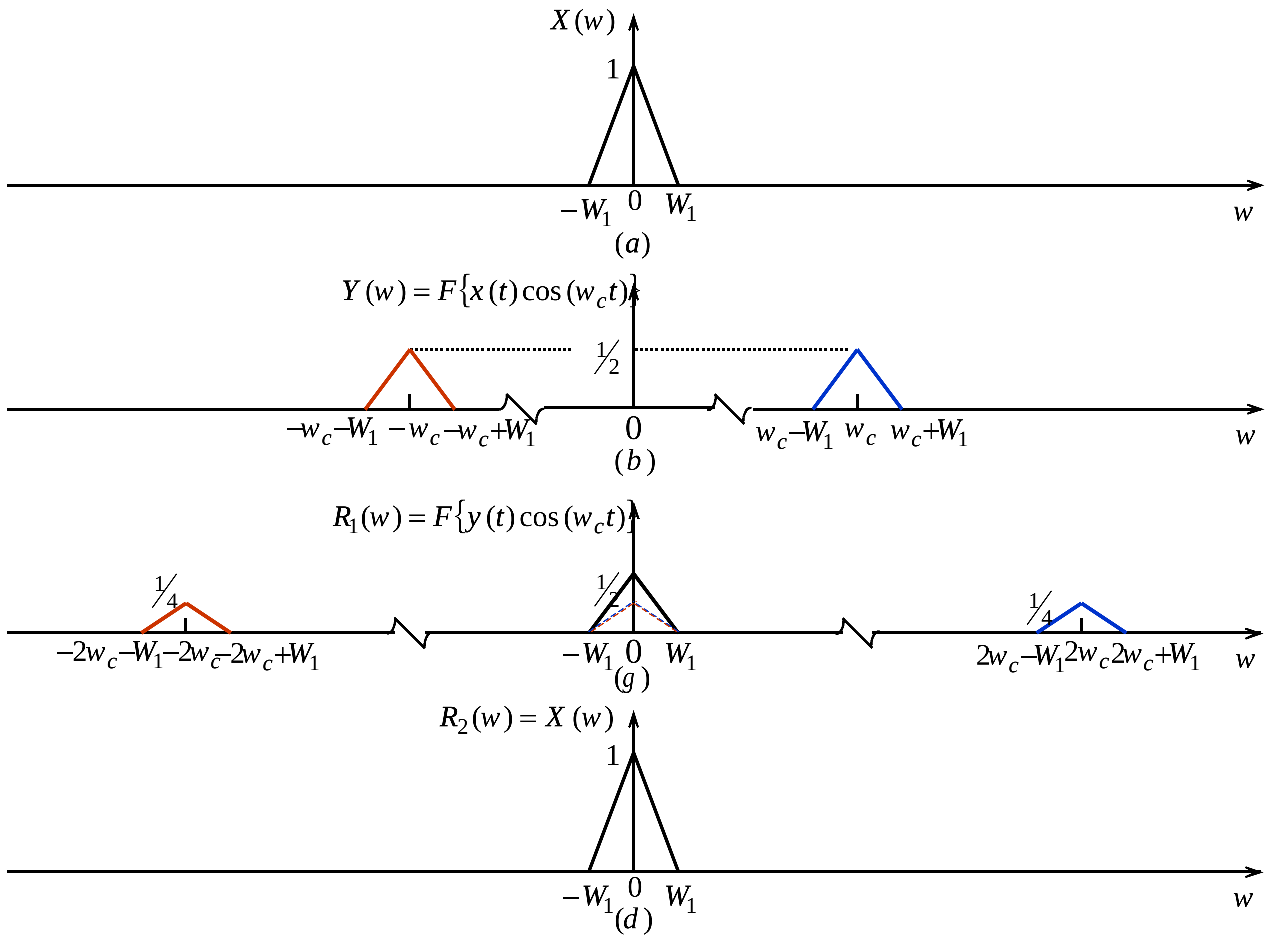
Η λύση του Θέματος βασίζεται στην ιδιότητα ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(w)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό w_0 ισχύει $e^{jw_0 t}x(t)\xleftrightarrow{F}X(w-w_0)$. Στο Σχήμα 5α είναι το φάσμα του σήματος εισόδου $x(t)$, που είναι ένα φάσμα περιορισμένου εύρους ζώνης με εύρος ζώνης $2W_1$.

Όπως στο Παράδειγμα 3.10 προσδιορίζουμε το φάσμα του σήματος $y(t)$, $Y(w)$ το οποίο έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5β. Το φάσμα αυτό αποτελείται από δύο τμήματα το ένα βρίσκεται στην περιοχή $-w_c-W_1$ έως $-w_c+W_1$ και το άλλο στην περιοχή w_c-W_1 έως w_c+W_1.

Όταν το σήμα $y(t)$ πολαπλασιαστεί με $\cos(w_c t)$ τότε κάθε μία από τις δύο παραπάνω τμήματα ολισθαίνουν στην συχνότητα και έτσι το φάσμα του σήματος $r_1(t)$, $R_1(w)$ αποτελείται από τέσσερα τμήματα. Ένα βρίσκεται στην περιοχή $-2w_c-W_1$ έως $-2w_c+W_1$, ένα άλλο βρίσκεται στην περιοχή $2w_c-W_1$ έως $2w_c+W_1$, και τα δύο τελευταία στην περιοχή $-w_c$ έως w_c τα οποία προστίθενται και δίνουν το τριγωνικό τμήμα στο μηδέν με πλάτος 1/2. Στο Σχήμα 5γ έχει σχεδιαστεί το φάσμα $R_1(w)$.

Τέλος όταν το σήμα $r_1(t)$ διέλθει μέσα από το ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης αποκόπτονται τα δύο τμήματα που βρίσκονται στις συχνότητες $\pm 2w_c$, ενώ το τμήμα που βρίσκεται στη βασική ζώνη διέρχεται με διπλάσιο πλάτος. Το φάσμα του σήματος $r_2(t), R_2(w)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5δ. Παρατηρούμε ότι είναι το ίδιο με το φάσμα του σήματος εισόδου της διάταξης.

Σημείωση
Στο θέμα αυτό περιγράφεται η διαδικασία της διαμόρφωσης και της αποδιαμόρφωσης.



Σχήμα 5 Τα φάσματα των σημάτων $x(t)$ $y(t)$, $r_1(t)$ και $r_2(t)$.