Θέματα Περασμένων Εξετάσεων και Απαντήσεις

Εξετάσεις Ιουνίου 2004.

ΘΕΜΑ 1. (1,5 μονάδα)

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(4p\ t)}{p\ t}\cos(8p\ t)$$

Να βρεθεί η έξοδός του αν η είσοδός είναι $x(t) = \cos(2p\ t) + \cos(6p\ t) + \cos(18p\ t)$

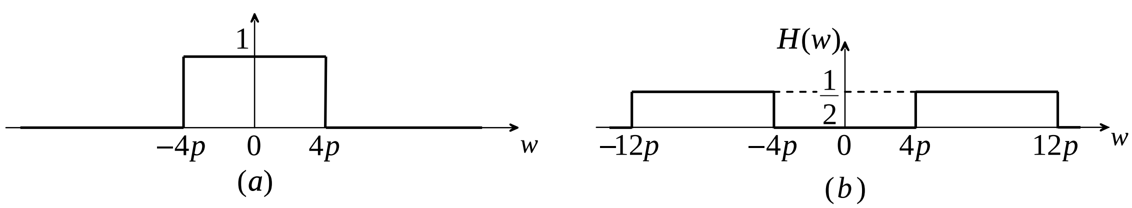
Λύση:

Εφαρμόζοντας το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier $x(t) = \frac{\sin(W\,t)}{p\ t} \xleftrightarrow{\ F\ } X(w) = \begin{cases} 1, & |w| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

έχουμε

$$\frac{\sin(4p\ t)}{p\ t} \xleftrightarrow{\ F\ } \begin{cases} 1, & |w| < 4p \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 1α έχει γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.



Σχήμα 1 Η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος στο Θέμα 1.

Στη συνέχεια λόγω της ιδιότητας της διαμόρφωσης $x(t)\cos(w_0 t) \xleftrightarrow{\ F\ } \frac{1}{2}\left[X(w - w_0) + X(w + w_0)\right]$

έχουμε

$$h(t) = \frac{\sin(4p\ t)}{p\ t}\cos(8p\ t) \xleftrightarrow{\ F\ } H(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 4p < |w| < 12p \\ 0, & a\,l\,l\,i\acute{\omega}V \end{cases}$$

Στο Σχήμα1β έχει γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου.

Παρατηρούμε ότι είναι ένα ζωνοπερατό ιδανικό φίλτρο με απολαβή ίση με $1/2$, με εύρος ζώνης διέλευσης $8p$ και κεντρική συχνότητα $8p$.Το σήμα εισόδου είναι άθροισμα τριών σημάτων μιας συχνότητας, το φίλτρο αποκόπτει τις συχνότητες $2p$ και $12p$ και υποβιβάζει το πλάτος της συχνότητας $8p$ στο μισό. Έτσι το σήμα εξόδου του ζωνοπερατού φίλτρου είναι

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos(6p\ t)$$

ΘΕΜΑ 2. (2 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{d\,y(t)}{dt} + 8\,y(t) = 2\,x(t)$$

όπου $x(t)$ είναι η είσοδός του και $y(t)$ η έξοδός του.

2α) Να βρεθεί η κρουστική του απόκριση

2β) Να βρεθεί η έξοδός του όταν η είσοδός του είναι $x(t)=e^{-2t}u(t)$ όπου $u(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.
2γ) Να υλοποιήσετε διαγραμματικά το σύστημα χρησιμοποιώντας αθροιστές πολλαπλασιαστές και ολοκληρωτές.
Λύση:
2α) Λαμβάνοντας μετασχηματισμό Laplace στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$s^2Y(s)+6sY(s)+8Y(s)=2X(s)$$

Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s)=\frac{2}{s^2+6s+8}=\frac{2}{(s+2)(s+4)}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4}$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re e\{s\}>-2$ αφού το σύστημα είναι αιτιατό.
Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t)=\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right)u(t)$$

2β) Για το σήμα εισόδου έχουμε

$$x(t)=e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=\frac{1}{s+2}$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re e\{s\}>-2$
Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος είναι

$$Y(s)=H(s)X(s)=\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4}\right)\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{1}{s+4}\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+4}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

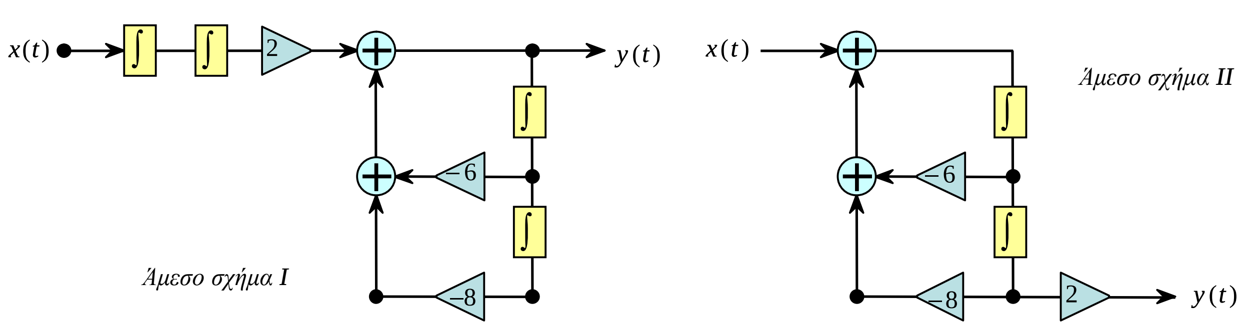
με πεδίο σύγκλισης την τομή του επιπέδου σύγκλισης του ML της εισόδου και του ML της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή, $\Re e\{s\}>-2$.
Η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t)=\left(te^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$

2γ) Η διαφορική εξίσωση που χαρακτηρίζει το σύστημα με διπλή ολοκλήρωση γράφεται ως

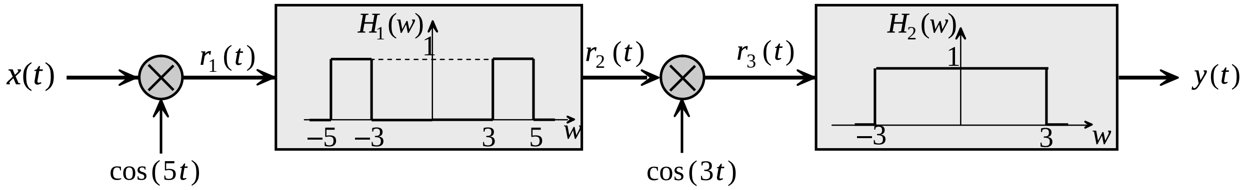
$$y(t)=2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}x(x)\,dx\,dt-6\int_{-\infty}^{t}y(t)\,dt-8\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}y(x)\,dx\,dt$$

έτσι έχουμε τις διαγραμματικές υλοποιήσεις του Σχήματος 2.



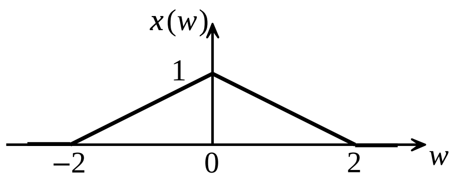
Σχήμα 2 Οι διαγραμματικές υλοποιήσεις του συστήματος στο Θέμα 2.

ΘΕΜΑ 3. (1,5 μονάδα)
Δίνεται η διάταξη που περιγράφεται στο Σχήμα 3.



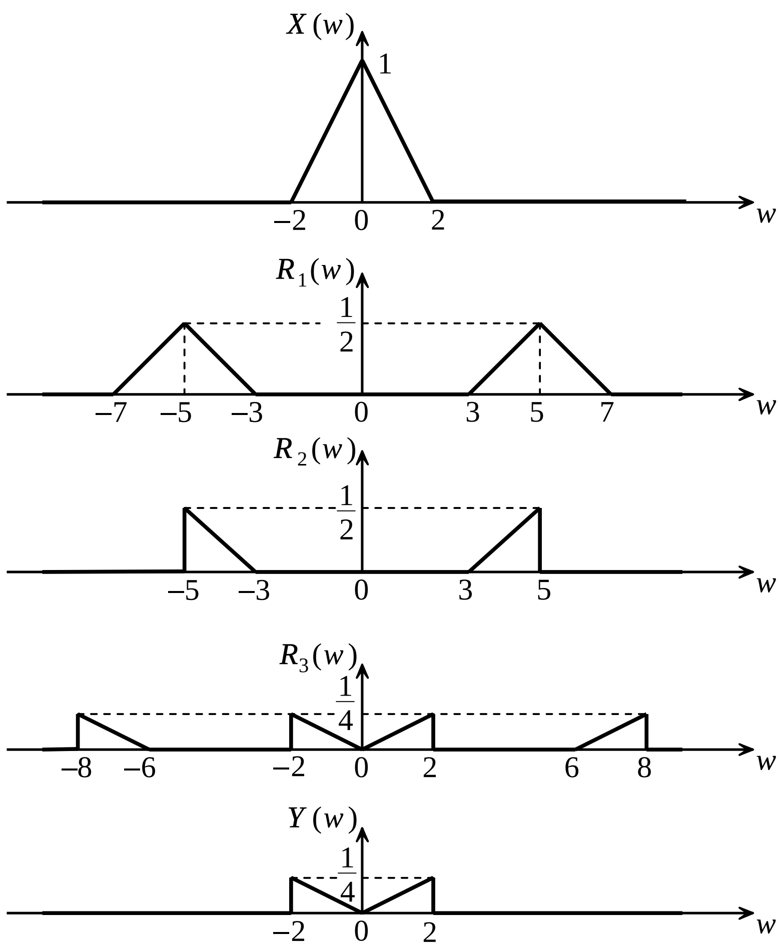
Σχήμα 3 Η διάταξη του Θέματος 3.

Στην είσοδο της διάταξης εφαρμόζεται σήμα του οποίου το φάσμα περιγράφεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4 Το φάσμα του σήματος εισόδου στο Θέμα 3.

Να σχεδιάσετε το φάσμα της εξόδου του συστήματος $y(t)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Σχήμα 5 Το φάσμα των σήματος $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ και $y(t)$ στο Θέμα 3.

Λύση:

Η λύση του θέματος βασίζεται στην ιδιότητας της διαμόρφωσης

$$x(t)\cos(w_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(w-w_0)+X(w+w_0)\right]$$

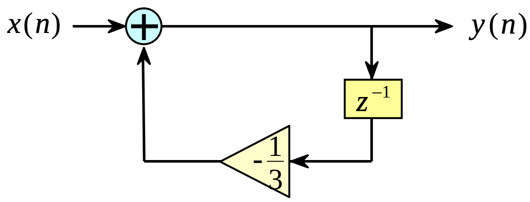
κατά την οποία ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με $\cos(w_0 t)$ μεταφέρει το φάσμα του σήματος στην περιοχή των συχνοτήτων w_0 και $-w_0$ με πλάτος ίσο με το μισό.

Υπενθυμίζεται επίσης ότι όταν ένα σήμα διέρχεται μέσα από ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης με συχνότητα αποκοπής w_c τότε οι συχνότητες του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης $[-w_c\,,\,w_c\,]$ διέρχονται από το φίλτρο με αμετάβλητο πλάτος ενώ οι άλλες αποκόπτονται. Αντίστοιχα ισχύουν για ένα ζωνοπερατό φίλτρο.

Στο Σχήμα 5 φαίνονται τα φάσματα των σημάτων $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ και $y(t)$

ΘΕΜΑ 4. (2 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό φίλτρο το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 6



Σχήμα 6 Το αιτιατό φίλτρο στο Θέμα 4.

Αν η είσοδος του συστήματος είναι $x(n)=u(n)$ όπου $u(n)$ η μοναδιαία βηματική ακολουθία, να βρεθεί η έξοδος του με αρχική συνθήκη $y(-1)=1$.

Λύση:

Από τη διαγραμματική υλοποίηση του φίλτρου παρατηρούμε ότι $y(n)=x(n)-\frac{1}{3}y(n-1)$ έτσι η εξίσωση διαφορών που συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος είναι

$$y(n)+\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$$

Εφαρμόζοντας μονόπλευρο μετασχηματισμό z έχουμε

$$Y^+(z)+\frac{1}{3}\left(z^{-1}Y^+(z)+y(1)\right)=X^+(z) \;\Rightarrow\; Y^+(z)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)=X^+(z)-\frac{1}{3}y(-1)$$

και επειδή $x(n)=u(n) \xleftrightarrow{z} X^+(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ και $y(-1)=1$ έχουμε

$$Y^+(z)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; Y^+(z)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

αναλύοντας το πρώτο κλάσμα σε απλά κλάσματα έχουμε

$$Y^+(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}+\frac{3}{4}\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{3}{4}\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{12}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό z λαμβάνοντας υπ όψιν ότι έχουμε αιτιατά σήματα και έτσι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z ισούται με το μετασχηματισμός z, βρίσκουμε την έξοδο του συστήματος

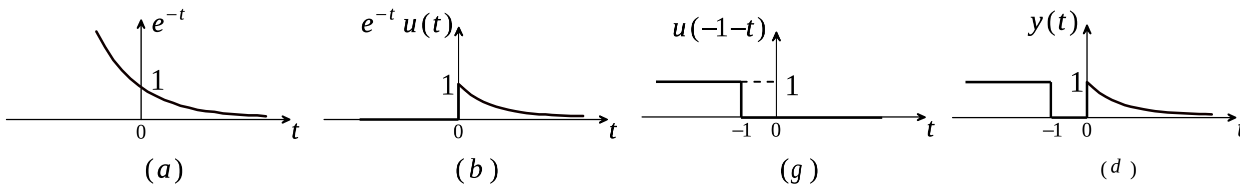
$$y(n)=\frac{3}{4}u(n)-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

ΘΕΜΑ 5. (0,5 μονάδα)

Να σχεδιάσετε το σήμα $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$ όπου $u(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Λύση:

Στο Σχήμα 7α έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος e^{-t} στο Σχήμα 7β η γραφική παράσταση του σήματος $e^{-t}u(t)$. Στο Σχήμα 7γ υπάρχει η γραφική παράσταση του σήματος $u(-1-t)$. Έτσι η γραφική παράσταση του σήματος $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$ στο Σχήμα 7δ.



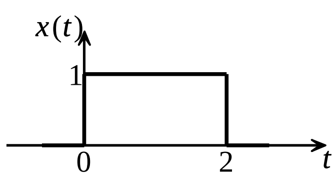
Σχήμα 7 Ο γραφικός προσδιορισμός του σήματος $y(t)$ στο Θέμα 5.

ΘΕΜΑ 6. (1 μονάδα)

Όταν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $x_0(t)=u(t)$ η έξοδος είναι

$$y_0(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμόζεται το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 8.



Σχήμα 8 Το σήμα $x(t)$ στο Θέμα 6.

Λύση:

Το θέμα αυτό λύνεται εύκολα με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητα

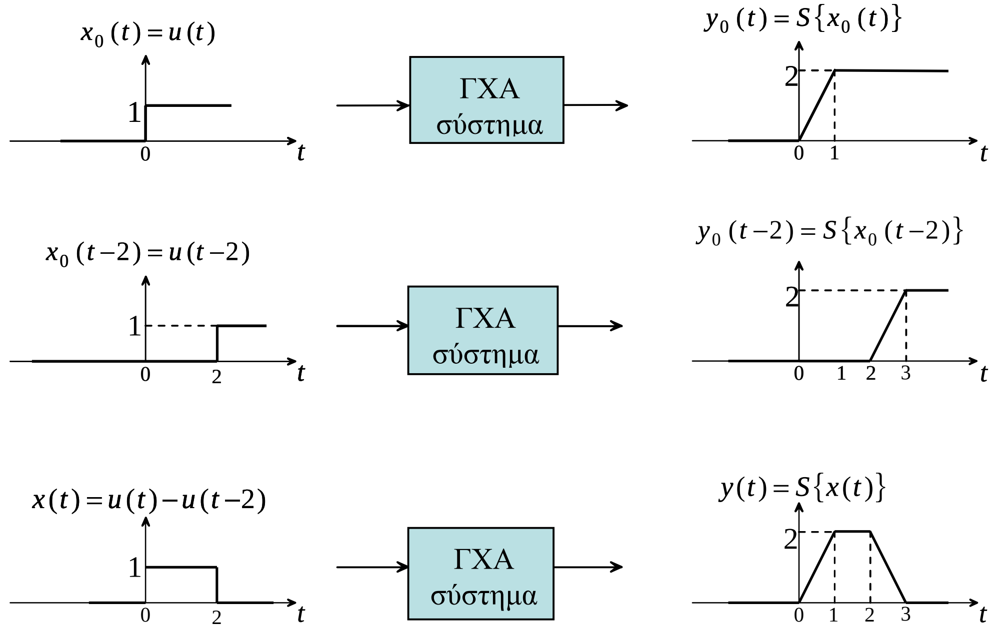
$$S\{a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\}=a\,S\{x_1(t)\}+b\,S\{x_2(t)\}$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ γράφεται ως $x(t)=u(t)-u(t-2)$, Έτσι η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t)$ είναι

$$y(t)=S\{x(t)\}=S\{u(t)-u(t-2)\}=S\{u(t)\}-S\{u(t-2)\}=y_0(t)-y_0(t-2)$$

Στο Σχήμα υπάρχει η γραφική λύση του θέματος. Η έξοδος λοιπόν του συστήματος είναι

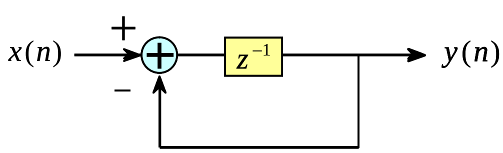
$$y_0(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t<1\\ 6-2t & 2\le t<3\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$



Σχήμα 9 Ο γραφικός προσδιορισμός της εξόδου του συστήματος στο Θέμα 6 με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας.

ΘΕΜΑ 7. (0,5 μονάδα)

Δίνεται το σύστημα του Σχήματος 10.



Σχήμα 10 Το σύστημα στο Θέμα 8

Να σχεδιάσετε την έξοδό του όταν η είσοδός του είναι

7α) $x_1(n)=d(n)$ όπου $d(n)$ το μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου

7β) $x_2(n)=u(n)$ όπου $u(n)$ η μοναδιαία βηματική ακολουθία

Λύση:

Από τη διαγραμματική υλοποίηση του φίλτρου παρατηρούμε ότι $y(n)=x(n-1)-y(n-1)$ έτσι η εξίσωση διαφορών που συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος είναι

$$y(n)+y(n-1)=x(n-1)$$

7α) Όταν το σήμα εισόδου είναι ι $x_1(n)=d(n)$ η έξοδος βρίσκεται απλά με τη παρατήρηση

$n=0$ $\quad y(0)=x(-1)-y(-1)=0$

$n=1$ $\quad y(1)=x(0)-y(0)=1-0=1$

$n=2$ $\quad y(2)=x(1)-y(1)=0-1=-1$

$n=3$ $\quad y(3)=x(2)-y(2)=0-(-1)=1$

$\vdots$ $\quad \vdots$

n $\quad y(n)=x(n-1)-y(n-1)=(-1)^{n-1}u(n-1)$

Στο Σχήμα 11 είναι η γραφική παράσταση της εξόδου του συστήματος για είσοδο $x_1(n)=d(n)$

Το Θέμα λύνεται και με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης. Υπολογίζεται αρχικά ο μετασχηματισμός z της εξόδου και στη συνέχεια βρίσκεται η έξοδος.

Είναι $x_1(n)=d(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)=1$ Αν πάρουμε μετασχηματισμό z στην εξίσωση διαφορών που χαρακτηρίζει το σύστημα βρίσκεται ο μετασχηματισμός z της εξόδου

$$z\{y_1(n)+y_1(n-1)\}=z\{x_1(n-1)\} \Rightarrow Y_1(z)\left(1+z^{-1}\right)=z^{-1} \Rightarrow Y_1(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{1}{1+z}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x(n)=a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z)=\dfrac{z}{z-a}$ τότε

$$x(n-1)=a^{n-1}u(n-1) \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z)=\frac{1}{z-a}$$

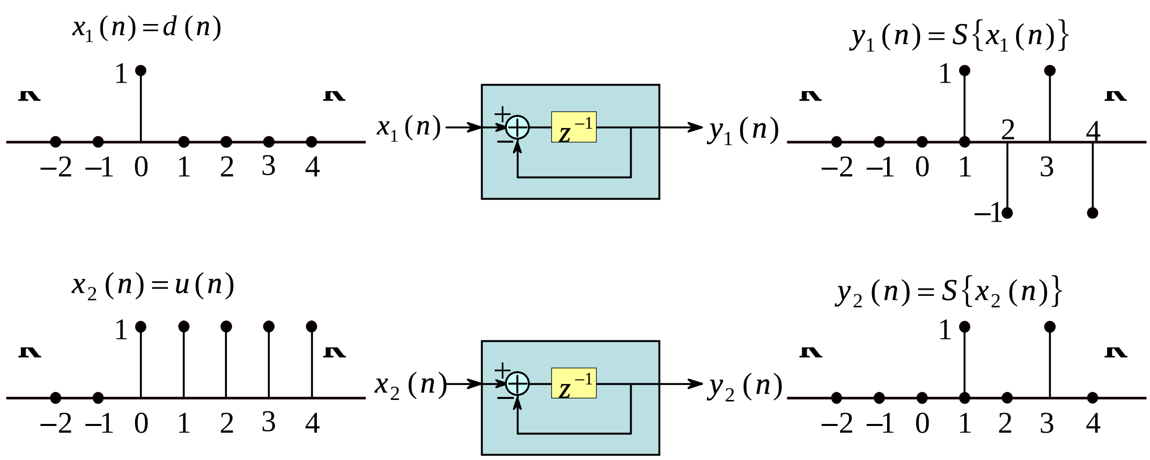
Άρα η έξοδος του συστήματος είναι

$$y_1(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$$

7β) Με όμοιο τρόπο βρίσκεται η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x_2(n)=u(n)$

$$y_2(n)=-\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)u(n)$$

Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου είναι στο Σχήμα 11.



Σχήμα **11** Οι γραφικές παραστάσεις της εξόδου στο Θέμα 7.

ΘΕΜΑ 8. (1 μονάδα)

Να εξετάσετε αν τα συστήματα με κρουστική απόκριση

8α) $h(t)=e^{-4|t|}$

8β) $h(t)=e^{-3t}u(t-1)$

είναι ΦΕΦΕ ευσταθή ή και αιτιατά.

Λύση:

Υπενθυμίζεται ότι έν σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές όταν η κρουστική του απόκριση είναι απολύτως φραγμένη

8α) Για το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)=e^{-4|t|}$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-4|t|}\right|dt=\int_{-\infty}^{0}e^{4t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=\frac{1}{4}\left[e^{4t}\Big|_{-\infty}^{0}-e^{-4t}\Big|_{0}^{\infty}\right]=\frac{1}{4}[(1-0)-(0-1)]=\frac{1}{2}<\infty$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές

Το σύστημα δεν είναι αιτιατό γιατί είναι $h(t)\neq 0$, για $t<0$

8β) Για το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t} u(t-1)$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} | h(t) | dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-3t|} u(t-1) \right| dt = \int_{1}^{\infty} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3} e^{-3t} \Big|_{1}^{\infty} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3} < \infty$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές

Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί είναι $h(t) = 0$, για $t < 0$

Τονίζεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης (συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος) έχει πεδίο σύγκλισης το δεξιό ημιεπίπεδο επειδή το σύστημα είναι αιτιατό έτσι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός αυτό για να δείξουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό.