Θέματα Εξετάσεων και Λύσεις

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002.

ΘΕΜΑ 1. (1 μονάδα)

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \cos(a\,t)\;\; e^{-a|t|}$$

Λύση

Το σήμα γράφεται $x(t) = \cos(a\,t)\; e^{-a|t|} = e^{-a|t|}\frac{1}{2}\left(e^{-a\,t} + e^{-a\,t}\right)$ Από το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \dfrac{2\,a}{a^2 + w^2}$ για $\Re e\{a\} > 0$ και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού Fourier $x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} X(w)\, e^{-j\,w\,t_0}$ προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$

$$F[\,x(t)\,] = \frac{a}{a^2 + (\,w - a\,)^2} + \frac{a}{a^2 + (\,w + a\,)^2} \quad \text{με} \quad \Re e\{a\} > 0$$

Ένας άλλος τρόπος που βασίζεται στην ιδιότητα της συνέλιξης, ο οποίος δεν είναι ο πρακτικότερος, είναι

$$X(w) = \frac{1}{2p} F\left[\cos(a\,t)\right] * F\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{1}{2p}\, p\left[d\,(w - a) + d\,(w + a)\right] * \frac{2\,a}{a^2 + w^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + (\,w - a\,)^2} + \frac{a}{a^2 + (\,w + a\,)^2} \quad \text{με} \quad \Re e\{a\} > 0$$

ΘΕΜΑ 2. (1 μονάδες)

Δίνεται το σήμα

$$x(t) = \sin c\,(t)$$

Να βρεθούν **2α)** η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος και **2β)** η ενέργειά του.

Λύση

2α) Ο MF του σήματος $x(t) = \text{sinc}\,(\text{t}) = \dfrac{\sin\,(p\ \text{t})}{p\ \text{t}}$ είναι $X(w) = \begin{cases} 1, & |w| < p \\ 0, & |w| > p \end{cases} = \Pi\left(\dfrac{w}{2p}\right)$ έτσι η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος είναι

$$\left|\,X(w)\right|^2 = \Pi^2\left(\frac{w}{2p}\right) = \Pi\left(\frac{w}{2p}\right) = \begin{cases} 1, & |w| < p \\ 0, & |w| > p \end{cases}$$

2β) και η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_X = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{w}{2p}\right) dw = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} 1\; dw = 1$$

Η ενέργεια του σήματος μπορεί να βρεθεί αν βρεθεί η συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

$$R_x(t) = F^{-1}\left[\left|\,X\,(w)\right|^2\right] = \text{sinc}\,(t)$$

προσδιορίζοντας την τιμή της για $t = 0$, πράγματι

$$E_X = R_x(0) = 1$$

ΘΕΜΑ 3. (1 μονάδα)

3α) Να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) = \text{sinc}\left[\,2\,\,(t - 1)\,\right]$

3β) Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό $y_1(t) = x(t)\,u(t)$;

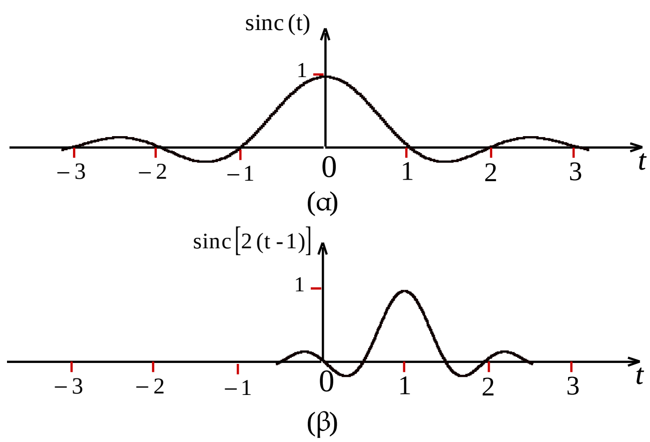
PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com

Λύση

3α) Η συνάρτηση δειγματοληψίας $\mathrm{sinc}(\mathrm{x})$ όπως είναι γνωστό ορίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{sinc}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \dfrac{\sin(p\,\mathrm{t})}{p\,\mathrm{t}}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Στο Σχήμα 1α είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δειγματοληψίας. Στη συνέχεια από το σήμα $\mathrm{sinc}(t)$ βρίσκουμε το σήμα $\mathrm{sinc}(2t)$ που αποτελεί μια χρονική συστολή της συνάρτησης δειγματοληψίας κατά 2 και με χρονική μετατόπιση κατά 1 προσδιορίζουμε το $x(t) = \mathrm{sinc}\left[2\,(t-1)\right]$. Στο Σχήμα1β είναι η γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = \mathrm{sinc}\left[2\,(t-1)\right]$



Σχήμα 1 *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δειγματοληψίας και του σήματος* $x(t) = \mathrm{sinc}\left[2\,(t-1)\right]$

Ένας άλλος τρόπος, που δεν είναι ο καλύτερος, είναι να προσδιοριστούν ορισμένα σημεία του σήματος $x(t) = \mathrm{sinc}\left[2\,(t-1)\right] = \dfrac{\sin 2p\,(t-1)}{2p\,(t-1)}$, και με τη βοήθεια αυτόν να σχεδιαστεί το σήμα.

3β) Αν έχουμε ως σήμα εισόδου το σήμα $a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$, τότε η έξοδος του συστήματος $y_1(t) = x(t)\,u(t)$ θα είναι

$$S\left[a\,x_1(t) + b\,x_2(t)\right] = \left(a\,x_1(t) + b\,x_2(t)\right)u(t) = a\,x_1(t)\,u(t) + b\,x_2(t)\,u(t) = a\,S\left[x_1(t)\right] + bS\left[x_2(t)\right]$$

Άρα το σύστημα $y_1(t) = x(t)\,u(t)$ είναι γραμμικό.

ΘΕΜΑ 4. **(**1,5 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο ε΄χει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2z}{2z-1}$$

4α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών στο οποίο να υπάρχει και η περιοχή σύγκλισης. Είναι το σύστημα ευσταθές; **4β)** Ποιά είναι η εξίσωση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ και την έξοδο $y(t)$ του συστήματος. **4γ)** Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου του είναι

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 u(n)$$

με αρχική συνθήκη $y(-1) = 2$.

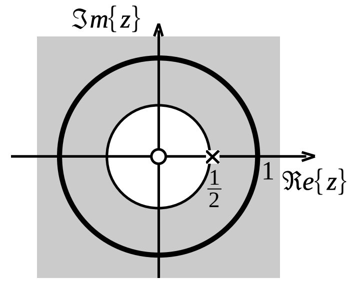
Λύση

Σημειώνεται ότι η εξίσωση $y(n) = h(n) * x(n)$ και η $Y(z) = H(z) * X(z)$ εφαρμόζονται όταν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, δηλαδή, δεν έχουμε αρχικές συνθήκες.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com

4α) Το σήστημα έχει ένα μηδενικό για $z=0$ και ένα πόλο για $z=1/2$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό θα πρέπει $|z|>1/2$. Στο Σχήμα 2 είναι το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και το πεδίο σύκλισης.

Επειδή στη περιοχή σύγκλισης περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος το σύστημα είναι αιτιατό.



Σχήμα 2

4β) Η εξίσωση διαφορών που συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος προσδιορίζεται ως

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)}\Rightarrow Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=X(z)\Rightarrow Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}y(z)=X(z)$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό z στην τελευταία εξίσωση έχουμε

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$$

4γ) Για να βρούμε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι το σήμα $x(n)$ επειδή το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες λαμβάνουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών και έτσι ενσωματώνουμε τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

$$Y(z)-\frac{1}{2}\left(z^{-1}Y(z)+y(-1)\right)=X(z)\Rightarrow Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=X(z)+\frac{1}{2}y(-1)$$

επειδή $x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)\xleftrightarrow{z}\frac{1}{1-1/4z^{-1}}$ και $y(-1)=2$ έχουμε

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=\frac{1}{1-1/4z^{-1}}+1=\frac{1+1-1/4z^{-1}}{1-1/4z^{-1}}\Rightarrow$$

$$Y(z)=\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\ \text{με Π.Σ. } |z|>\frac{1}{2}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό z έχουμε το αιτιατό σήμα εξόδου

$$y(n)=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

ΘΕΜΑ 5. **(**1,5 μονάδες)

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται το σήμα

$$x(t)=e^{-2t}u(t)$$

Εργαζόμενοι στο πεδίο συχνοτήτων **5α)** να βρεθεί η έξοδος του συστήματος. **5β)** Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος εξόδου.

Λύση

5α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης βρίσκουμε το μετασχηματισμό Fourier της εξόδου

$$Y(w)=H(w)\,X(w)=\frac{1}{1+jw}\frac{1}{2+jw}=\frac{1}{1+jw}+\frac{1}{2+jw}$$

με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(t)=F^{-1}\left[Y(w)\right]=\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

5β) Το σήμα εξόδου είναι σήμα ενέργειας και η ενέργειά του είναι

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com

$$E_y = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|y(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[e^{-2t}-2e^{-t}e^{-2t}+e^{-4t}\right]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^T - \frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_0^T + \frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_0^T\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Για να βρούμε την ενέργεια εργαζόμενοι στο πεδίο συχνοτήτων προσδιορίζεται αρχικά η φασματική πυκνότητα ενέργειας

$$\left|Y(w)\right|^2 = \frac{1}{\left(2-w^2\right)^2+\left(3w\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+w^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2+w^2}$$

και στη συνέχεια βρίσκεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_y(t) = F^{-1}\left[\left|Y(w)\right|^2\right] = \frac{1}{6}e^{-|t|} - \frac{1}{12}e - 2e^{-2|t|}$$

και η ενέργεια θα είναι

$$E_y = R_y(0) = \frac{1}{12}$$

ΘΕΜΑ 6. (1 μονάδα)

Η απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος στο σήμα

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

είναι το σήμα $d(t)$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης του συστήματος στο σήμα

$$x_1(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$$

Λύση

Αν $H(w)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος τότε

$$H(w)F\left[e^{-t}u(t)\right] = F\left[d(t)\right] \Rightarrow H(w)\frac{1}{1+jw} = 1 \Rightarrow H(w) = 1+jw$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου $x_1(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$ είναι

$$F\left[x_1(t)\right] = F\left[\tfrac{1}{2}e^{-t}u(t)e^{2t} + \tfrac{1}{2}e^{-t}u(t)e^{-2t}\right] = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1+j(w-2)} + \frac{1}{1+j(w+2)}\right]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου $y(t)$ είναι

$$Y(w) = H(w)F\left[x_1(t)\right] = \left(1+jw\right)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+j(w-2)} + \frac{1}{1+j(w+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+jw}{1+j(w-2)} + \frac{1+jw}{1+j(w+2)}\right] = \frac{\left(1+jw\right)^2}{\left(1+jw\right)^2+4}$$

Το θέμα μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace ως

Με τη βοήθεια του ζεύγους μετασχηματισμού Laplace $\left[e^{-at}\cos(w_0 t)\right]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$ με $\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$ προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x_1(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

$$x_1(t) = \left[e^{-t}\cos(2t)\right]u(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \quad \text{με} \quad \Re e\{s\} > -1$$

Στο πεδίο σύγκλισης περιέχεται ο φανταστικός άξονας έτσι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος και είναι

$$X_1(w) = X_1(s)\Big\|_{s=jw} = \frac{jw+1}{(jw+1)^2+2^2}$$

και με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου

$$Y_1(w) = H(w)\,X_1(w) = \frac{(jw+1)^2}{(jw+1)^2+2^2}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com

Παρατήρηση: Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας απλός τρόπος προσδιορισμού της εξόδου $y_1(t)$. Τονίζεται ότι αυτό δεν το ζητά το θέμα. Ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου γράφεται και ως

$$Y_1(w) = H(w)\, X_1(w) = (jw+1)\, X_1(w)$$

οπότε η έξοδος είναι

$$y_1(t) = F^{-1}[Y_1(w)] = F^{-1}[X_1(w)] + F^{-1}[jw\, X_1(w)] = x_1(t) + \frac{d}{dt} x_1(t)$$

$$y_1(t) = e^{-t}\cos(2t)\,u(t) + \frac{d}{dt}\left[e^{-t}\cos(2t)\,u(t)\right] = e^{-t}\cos(2t)\,d(t) - 2e^{-t}\sin(2t)\,u(t)$$

$$= d(t) - 2e^{-t}\sin(2t)\,u(t)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση $\frac{d}{dt}u(t) = d(t)$.

ΘΕΜΑ 7. (1,5 μονάδες)

Η απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος στο σήμα

$$x(t) = u(t)$$

είναι το σήμα

$$y(t) = \left(1 - e^{-t} - t\,e^{-t}\right)u(t).$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η είσοδος του συστήματος όταν το σήμα εξόδου είναι

$$y_1(t) = \left(2 - 3e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$$

Λύση

Έχουμε τα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace για το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου του συστήματος

$$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{με Π.Σ. } \Re e[s] > 0$$

$$y(t) = \left(1 - e^{-t} - t\,e^{-t}\right)u(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)^2} \quad \text{με Π.Σ. } \Re e[s] > 0$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{με Π.Σ. } \Re e[s] > -1$$

Το πεδίο σύγκλισης της $H(s)$ επιλέγεται έτσι ώστε η τόμη του με το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης του $X(s)$ να δίνει το πεδίο σύγκλισης του $Y(s)$.

Ο μετασχηματισμός Laplace για το σήμα $y_1(t) = \left(2 - 3e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$ είναι

$$Y_1(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} = \frac{6}{s(s+1)(s+3)} \quad \text{με Π.Σ. } \Re e[s] > 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου του συστήματος όταν το σύστημα έχει έξοδου το σήμα $y_1(t) = \left(2 - 3e^{-t} + e^{-3t}\right)u(t)$ είναι

$$X_1(s) = \frac{Y_1(s)}{H(s)} = \frac{6(s+1)}{s(s+3)} = \frac{2}{s} + \frac{4}{s+3} \quad \text{με Π.Σ. } \Re e[s] > 0$$

και εδώ το πεδίο σύγκλισης της $X_1(s)$ επιλέγεται έτσι ώστε η τόμη του με το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης της $H(s)$ να δίνει το πεδίο σύγκλισης του $Y_1(s)$.Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκεται το αιτιατό, λόγω του πεδίου σύγκλισης, σήμα εισόδου

$$x_1(t) = 2\left(1 + 2e^{-3t}\right)u(t)$$

ΘΕΜΑ 8. (1,5 μονάδες)

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δίνονται

i) Αν το σήμα εισόδου είναι το σήμα $x(n) = (-2)^n$, τότε η έξοδος του συστήματος είναι το σήμα $y(n) = 0$ και

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com

ii) αν το σήμα εισόδου είναι το σήμα

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),$$

τότε η έξοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$y_1(n) = d(n) + c\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n),$$

όπου c σταθερά ποσότητα

8α) Να βρεθεί η σταθερά c. **8β)** Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, και **8γ)** Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(n) = 1$.

Λύση

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι αν η είσοδος ενός συστήματος είναι το σήμα $x(n) = z^n$ τότε η έξοδος του συστήματος είναι το σήμα $y(n) = H(z) \cdot z^n$. Η άσκηση δίνει την έξοδο $y(n) = 0$ για είσοδο $x(n) = (-2)^n$, άρα $H(-2) = 0$.

Οι μετασχηματισμοί z για τα σήματα $x_1(n)$ και $y_1(n)$ είναι

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \text{ με } |z| > \frac{1}{2} \text{ και } Y(z) = 1 + \frac{c}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{1+c-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \text{ με } |z| > \frac{1}{4}$$

Και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1+c-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \text{ με } |z| > \frac{1}{4}$$

Επειδή πρέπει να είναι $H(-2) = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$H(-2) = \frac{\left(1+c+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\frac{1}{8}\right)} = 0 \Rightarrow c = -\frac{9}{8}$$

και

$$H(z) = \frac{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \text{ με } |z| > \frac{1}{4}$$

Όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(n) = 1 = 1^n$ τότε η αντίστοιχη έξοδος θα είναι

$$y(n) = H(1)\,1^n = \frac{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{3}{8}\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{4}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.fineprint.com