1.1 ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από την κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} + \frac{\sin(4t)}{\pi t}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = \sin(t) - 2\cos(3t)$$

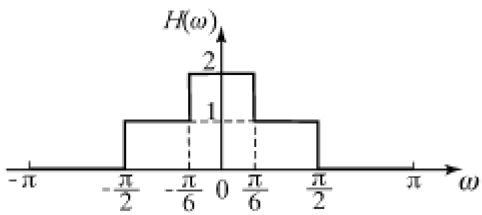
Λύση Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\omega) = F\{h(t)\} = F\left\{\frac{\sin(2t)}{\pi t} + \frac{\sin(4t)}{\pi t}\right\} = \Pi\left(\frac{3\omega}{\pi}\right) + \Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

όπου $\Pi\left(\frac{\xi}{2T_1}\right) = \begin{cases} 1, & |\xi| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Στο Σχήμα 1 υπάρχει η γραφική της παράσταση της απόκρισης. Πρόκειται για ένα φίλτρο που διπλασιάζει το πλάτος των συχνοτήτων για $|\omega| \le 2$, αφίνει να περάσουν οι συχνότητες $2 < |\omega| \le 4$ και κόβει τις συχνότητες $|\omega| > 2$. Επειδή το σήμα εισόδου είναι άθροισμα δύο σημάτων μιας συχνότητας η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$u(t) = 2\sin(t) - 2\cos(3t)$$



Σχήμα 1.1 Η απόκριση συχνότητας του συστήματος στο Θέμα 1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

Να υπολογιστεί η έξοδός του όταν η είσοδός του είναι

$$x(t) = u(t)$$

όπου $u(t)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Λύση

Από την κρουστική απόκριση προσδιορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$h(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{1}{a+s}, \qquad \Re e\{s\} > a$$

Από το σήμα εισόδου προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace του

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος

$$Y(\omega) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{a+s} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{a+s}\right]$$

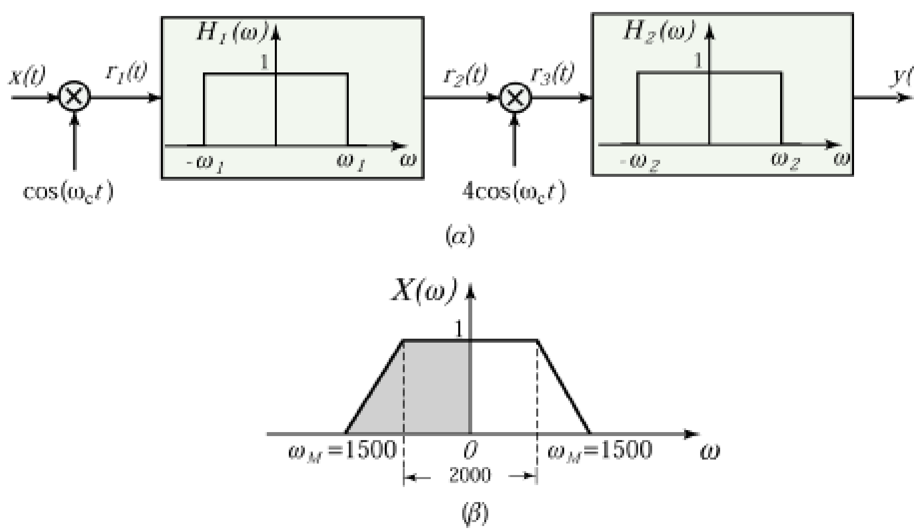
Το πεδίο σύγκλισης είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς και της εισόδου του συστήματος, δηλαδή, $\Re e\{s\} > 0$

Και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκεται η έξοδος του συστήματος

$$y(t) = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-at}\right] u(t)$$

ΘΕΜΑ 3

Στο Σχήμα 2α περιγράφεται ένα σύστημα με σήμα εισόδου $x(t)$ και σήμα εξόδου το $y(t)$. Το σήμα εισόδου



Σχήμα 1.2 Η διάταξη του 5 Θέματος

έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ ο οποίος εικονίζεται στο Σχήμα 2β στο οποίο το μέρος των αρνητικών συχνοτήτων είναι σκιασμένο ώστε να ξεχωρίζει από το αντίστοιχο των θετικών συχνοτήτων.

Αν $\omega_c = 10KHz$, $\omega_1 = 9,5KHz$ και $\omega_2 = 1KHz$ να σχεδιάσετε το φάσμα των σημάτων $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ και $y(t)$. Σε ποία περιοχή κάθε φάσματος εμφανίζονται οι φασματικές συνιστώσες που βρίσκονται στο σκιασμένο τμήμα του $X(\omega)$;

Λύση

Η λύση του Θέματος βασίζεται στην ιδιότητα ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier. Υπενθυμίζεται ότι αν ένα σήμα διέλθει μέσα από ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης με συχνότητα αποκοπής ω_c τότε οι συχνότητες του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης $-\omega_c < \omega < \omega_c$ διέρχονται από το φίλτρο με αμετάβλητο πλάτος.

Στο Σχήμα 3 φαίνονται τα φάσματα των σημάτων $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ και $y(t)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

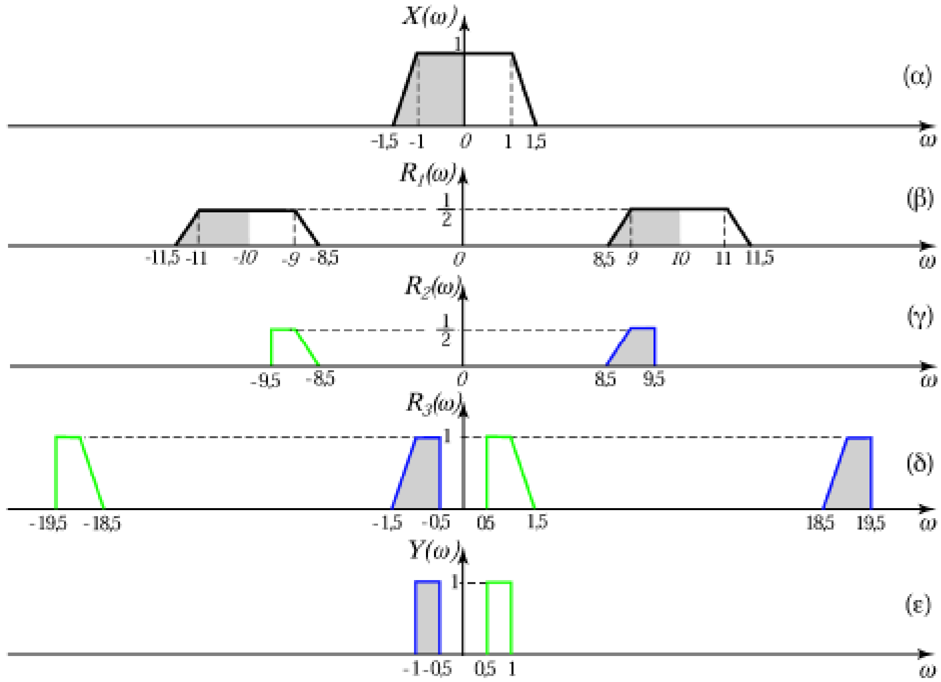
$$\frac{d^2y(t)}{dt} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι $y(0) = 3$ και $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^+} = -5$.

4α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και να σχεδιάσετε το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και να σχεδιάσετε το πεδίο σύγκλισής της. Είναι το σύστημα ευσταθές; και γιατί.

4β) Αν το σήμα ειδόδου είναι

$$x(t) = 2u(t)$$



Σχήμα 1.3 Ο Τα φάσματα των σημάτων $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ και $y(t)$ στο Θέμα 3.

όπου $u(t)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου του συστήματος.

4γ) Να βρεθεί το σήμα $y(t)$.

Λύση

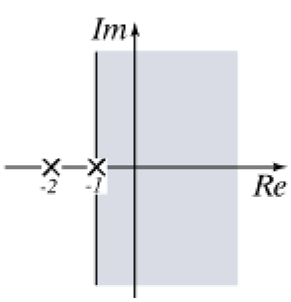
4α) Σημειώνεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς συστήματος έχει νόημα μόνο κάτω από μηδενικές συνθήκες. Έτσι για να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος εφαρμόζεται μετασχηματισμός Laplace στη διαφορική εξίσωση.

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

και

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Παρατηρούμε ότι έχει δύο πόλους $s = -1$ και $s = -2$ και το πεδίο σύκλισης είναι $\Re e\{s\} > -1$ επειδή το σύστημα είναι αιτιατό. Στο Σχήμα 4 φαίνεται το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς Το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης.



Σχήμα 1.4 Το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς στο Θέμα 5α.

Παρατήρηση

Η ιδιότητα της παραγώγησης στο χρόνο του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow Y^+(s) = sX^+(s) - x(0)$$

Αν η ιδιότητα εφαρμοστεί στη συνάρτηση $y(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \longleftrightarrow sY^+(s) - y(0) = s[sX^+(s) - x(0)] - \frac{d}{dt}x(t)|_{t=0}$$

Έτσι

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \longleftrightarrow = s^2X^+(s) - sx(0)] - \frac{d}{dt}x(t)|_{t=0}$$

4β) Εφαρμόζουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace στη διαφορική εξίσωση και παίρνουμε

$$s^2Y^+(s) - sy(0) - \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} + 3[sY^+(s) - y(0)] + 2Y^+(s) = X^+(s)$$

από την οποία έχουμε

$$s^2Y^+(s) - 3s + 5 + 3sY^+(s) - 9 + 2Y^+(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y^+(s)[s^2 + 3s + 2] = \frac{2}{s} + 3s + 4$$

και ο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace της εξόδου του συστήματος είναι

$$Y^+(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς και της εισόδου του συστή ματος, δηλαδή, $\Re e\{s\} > 0$

Παρατήρηση

Σημειώνεται ότι το πρώτο κλάσμα στο δεύτερο μέρος της εξίσωσης προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες ενώ το δεύτερο από το σήμα εισόδου.

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα έχουμε

$$Y^+(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

4γ) και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(t) = [1 - e^{\ t} + 3e^{\ 2t}]u(t)$$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$ ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών

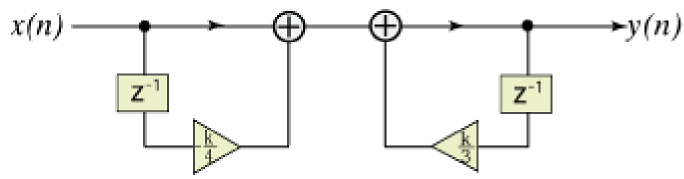
$$y(n) + \frac{k}{3}y(n-1) = x(n) - \frac{k}{4}x(n-1)$$

Το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία.

5α) Να γίνει η διαγραμματική του υλοποίησή του χρησιμοποιώντας προσθεταίους πολλαπλασιαστές με σταθερό αριθμό και μονάδες μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης.

5β) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και να σχεδιάσετε το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και να σχεδιάσετε το πεδίο σύγκλισής της.

5γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα είναι ευσταθές;



Σχήμα 1.5 Η διαγραμματική υλοποίηση του συστήματος.

5δ) Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος αν $k = 1$ και το σήμα εισόδου είναι

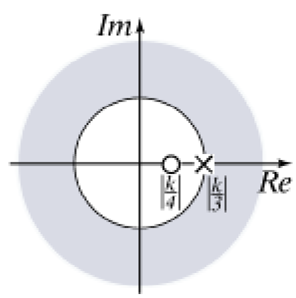
$$x(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Λύση

5α) Στο Σχήμα 5 φαίνεται η διαγραμματική υλοποίηση του συστήματος.
5β) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}$$

και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > \left|\frac{k}{3}\right|$ Το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και το πεδίο σύγκλισης του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 6. **5γ)** Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές πρέπει να



Σχήμα 1.6 Το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς στο Θέμα 5β.

περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης έτσι για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει $\left|\frac{k}{3}\right| < 1$, δηλαδή, το πεδίο σύγκλισης του Σχήματος 5β.

5δ) *Παρατήρηση*

Αν η είσοδος συστήματος είναι το εκθετικό σήμα $x(n) = a^n$ τότε η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(n) = H(a) \cdot a^n$$

δηλαδή η έξοδος λαμβάνεται από το ίδιο εκθετικό σήμα εισόδου διαβαθμισμένο με $H(a)$.

Η τιμή της $H(z)$ για $z = 2/3$ είναι

$$H\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1 - \frac{1}{4}\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{3}\frac{3}{2}} = \frac{5}{12}$$

Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(n) = H\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται ο αιτιατό ΓΧΑ σύστημα του οποίου η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$y(t) = 2x^2(t)$$

6α) Είναι το σύστημα γραμμικό και αντιστρέψιμο;

Αν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}$$

6β) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος.

Λύση

6α) Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $y(n) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ τότε η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 2[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]^2 = 2a_1^2 x_1^2(t) + 2a_2^2 x_2^2(t) + 4a_1 a_2 x_1(t) x_2(t)$$

η οποία είναι διάφορη από την $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ όπου $y_1(t) = 2x_1^2(t)$ και $y_2(t) = 2x_2^2(t)$. Άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Το σύστημα δεν είναι αντιστρέψιμο γιατί κάθε τιμή της εξόδου μπορεί να προέρχεται από δύο διαφορετικές τιμές της εισόδου.

6β) Το σήμα εξόδου είναι

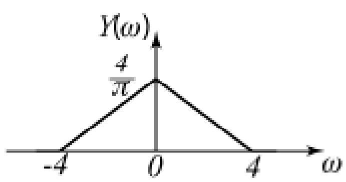
$$y(t) = 2x^2(t) = 2\left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2t)}{2t}\right)^2\right]$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier

$$\mathcal{F}\left[\frac{W}{\pi}\left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2\right] = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{2W}, & |\omega| < 2W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

έχουμε

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\sin(2t)}{2t}\right)^2\right] = \frac{4}{\pi}\begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 1.7 Ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος στο Θέμα 6.

Στο Σχήμα 7 είναι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος $Y(\omega)$.

Το θέμα λύνεται και με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης ως

$$\mathcal{F}[x^2(t)] = \mathcal{F}[x(t) \cdot x(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w) X(w - \omega) dw$$

όπου

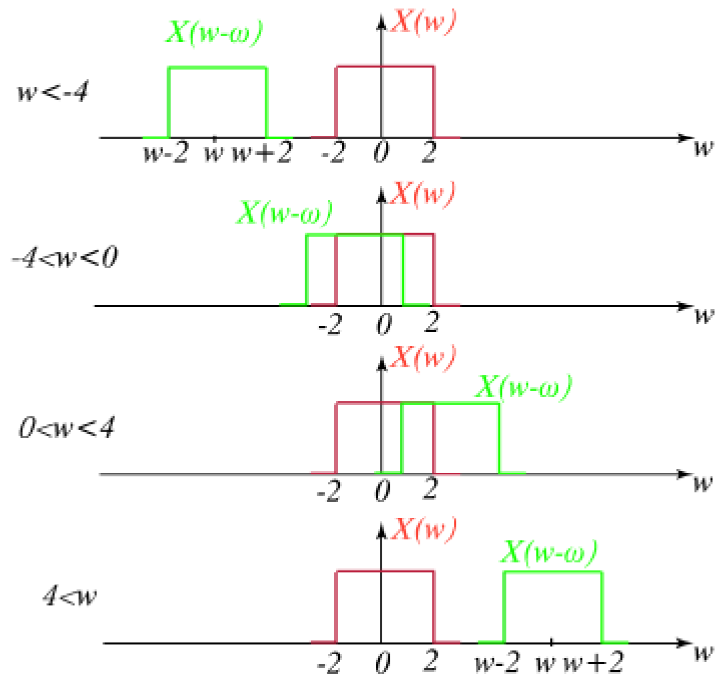
$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right] = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στο Παράδειγμα 2.6 και με τη βοήθεια του Σχήματος 8, προσδιορίζεται η συνέλιξη

$$X(\omega) \star X(\omega) = 4\begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

έτσι η έξοδος του συστήματος είναι

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[2x^2(t)] = 2\frac{1}{2\pi} X(\omega) \star X(\omega) = 2\frac{1}{2\pi} 4\begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{4}, & |\omega| < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 1.8 Ο γραφικός προσδιορισμός της εξόδου του συστήματος στο Θέμα 6.