# Θέματα Περασμένων Εξετάσεων και Απαντήσεις

**Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006.**

**ΘΕΜΑ 1.** (1 μονάδα)
Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{2\cos(10\pi t)\sin(5\pi t)}{\pi t}$$

Να βρεθεί και να σχεδιασθεί η απόκριση συχνότητας, $H(\omega)$, του συστήματος.

**Λύση:**
Η κρουστική απόκριση μπορεί να γραφεί και ως

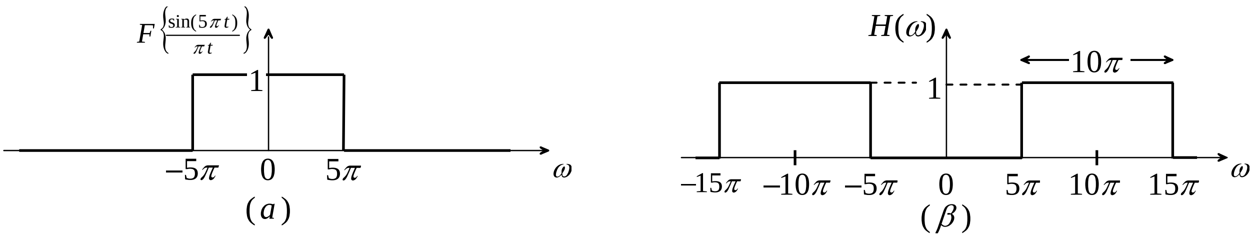
$$h(t) = 2\frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}\cos(10\pi t)$$

Εφαρμόζοντας το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

έχουμε

$$\frac{\sin(5\pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < 5\pi \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 1α έχει γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.




**Σχήμα 1.** Η απόκριση συχνότητας του ΓΧΑ συστήματος στο Θέμα 1.

Στη συνέχεια λόγω της ιδιότητας της διαμόρφωσης $x(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right]$

έχουμε

$$h(t) = 2\frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}\cos(10\pi t) \xleftrightarrow{F} H(\omega) = \begin{cases} 1, & 5\pi < |\omega| < 15\pi \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο Σχήμα1β έχει γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου. Παρατηρούμε ότι είναι ένα ζωνοπερατό ιδανικό φίλτρο με απολαβή ίση με 1, με εύρος ζώνης διέλευσης 10π και κεντρική συχνότητα 10π.

**ΘΕΜΑ 2.** (2 μονάδες)
Στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Εφαρμόζεται το σήμα

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$, του συστήματος

**2α**) όταν το σύστημα αρχικά ηρεμεί και

**2β**) όταν $y(0^-) = 1$.

**Λύση:**

**2α)** Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} H(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \Re e\{s\} > -2$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+3} \qquad \Re e\{s\} > -3$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης βρίσκεται ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος εξόδου ο οποίος αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \qquad \Re e\{s\} > -2$$

Το πεδίο σύγκλισης της $Y(s)$ είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης του σήματος εισόδου και της συνάρτησης μεταφοράς. Με αντίστοφο μετασχηματισμό Laplace προσδιορίζεται το σήμα εξόδου του συστήματος.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

**2β)** Επειδή το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες πρέπει αρχικά να προσδιορισθεί η διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει το σήμα εισόδου και εξόδου. Από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχουμε διαδοχικά

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \;\Rightarrow\; \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2} \;\Rightarrow\; sY(s) + 2Y(s) = X(s) \;\overset{L^{-1}}{\Rightarrow}\; \frac{d\,y(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ML της παραγώγου: $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \;\Rightarrow\; \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$.

Εφαρμόζοντας μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace στη διαφορική εξίσωση ενσωματώνουμε τις αρχικές συνθήκες του συστήματος και έχουμε

$$sY^+(s) - y(0^-) + 2Y^+(s) = X^+(s) \;\Rightarrow\; Y^+(s)(s+2) - 1 = \frac{1}{s+3} \;\Rightarrow Y^+(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)} + \frac{1}{s+2}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η αρχική συνθήκη $y(0^-) = 1$ και ο MML του σήματος εισόδου $X^+(s) = 1/(s+1)$. Η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$Y^+(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Με αντίστοφο μετασχηματισμό Laplace προσδιορίζεται το σήμα εξόδου του συστήματος.

$$y(t) = L^{-1}\{Y^+(s)\} = \left(2e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

## ΘΕΜΑ 3. (1,5 μονάδες)

Δίνεται το σήμα

$$x(t) = 2 \cdot e^{-t}u(t)$$

Να βρεθούν

**3α**) η φασματικη πυκνότητα ενέργειας του σήματος

**3β**) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του και

**3γ**) η ενέργειά του.

**Λύση:**

Όπως το Παράδειγμα 3.17 βρίσκεται

**3α**) ότι η φασματικη πυκνότητα ενέργειας του σήματος είναι

$$X(\omega) = \frac{2}{1+j\omega} \quad \Rightarrow \quad |X(\omega)|^2 = \frac{4}{1+\omega^2}$$

**3β**) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος είναι

$$R_x(\tau) = 2 \cdot e^{-|\tau|}$$

**3γ**) και η ενέργεια του.σήματος είναι

$$E_x = R_x(0) = 2 \text{ μονάδες ενέργειας}$$

## ΘΕΜΑ 4. (1 μονάδα)

Ο μετασχηματισμός Fourier σήματος, $x(t)$, είναι

$$X(\omega) = \frac{\sin(10\omega)}{\omega}$$

Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος.

**Λύση:**

Εφαρμόζοντας το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Έχουμε ότι το σήμα του οποίου ο ΜF είναι $X(\omega) = \sin(10\omega)/\omega$ είναι

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{\sin(10\omega)}{\omega}$$

Η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-10}^{10} \frac{1}{4} dt = 5$$

Σημειώνεται ότι η ενέργεια είναι δυνατό να βρεθεί και από την $E_X == \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$ αλλά ο τρόπος αυτός δεν ενδείκνυται λόγω της μαθηματικής του πολυπλοκότητας.

Ένας άλλος τρόπος είναι να προσδιοριστεί η ενέργεια του σήματος με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του σήματος. Η φασματική πυκνότητα του σήματος είναι

$$X(\omega) = \frac{\sin(10\omega)}{\omega} \quad \Rightarrow \quad |X(\omega)|^2 = \left(\frac{\sin(10\omega)}{\omega}\right)^2$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_x(\tau) = F^{-1}\left\{|X(\omega)|^2\right\} = 2\Lambda\left(\frac{t}{20}\right)$$

και η ενέργεια του.σήματος είναι

$$E_x = R_x(0) = 5 \text{ μονάδες ενέργειας}$$

## ΘΕΜΑ 5. (2 μονάδες)

Δίνεται το ευσταθές γραμμικά αναλλοίωτο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{2}{2-s}$$

**5α**) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

**5β**) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η έξοδός του όταν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

**Λύση:**

**5α**) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται ως

$$H(s) = \frac{2}{2-s} = -\frac{2}{s-2}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει ένα πόλο στο σημείο $s$ = 2. Επειδή το σύστημα είναι ευσταθές θα πρέπει να περιέχεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, επομένως το πεδίο σύγκλισης είναι $\Re e\{s\} < 2$.

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκεται η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{-\frac{2}{s-2}\right\} = 2e^{+2t}u(-t)$$

**5β**) Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{2}{s+2} \qquad \Re e\{s\} > -2$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης βρίσκεται ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος εξόδου

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = -\frac{4}{(s+2)(s-2)} = -\frac{4}{s^2+4} \qquad -2 < \Re e\{s\} < +2$$

Το πεδίο σύγκλισης της $Y(s)$ είναι η τομή των πεδίων σύγκλισης του σήματος εισόδου και της συνάρτησης μεταφοράς. Η $Y(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$Y(s) = -\frac{4}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s-2}$$

Με αντίστοφο μετασχηματισμό Laplace προσδιορίζεται το σήμα εξόδου του συστήματος.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = e^{+2t}u(-t) + e^{-2t}u(t) = e^{-2|t|}$$

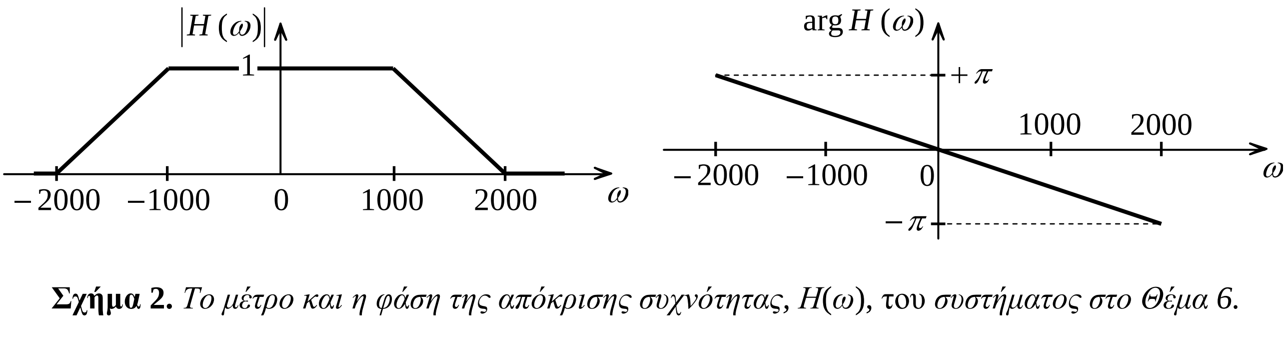
Σημειώνεται ότι δεν μπόρει να χρησιμοποιηθεί το ζευγάρι μετασχηματισμού Laplace

$$[\sin(\omega_0 t)]u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \Re e\{s\} > 0$$

δεδομένου ότι το πεδίο σύγκλισης είναι το $-2 < \Re e\{s\} < +2$ και όχι $\Re e\{s\} > 0$.

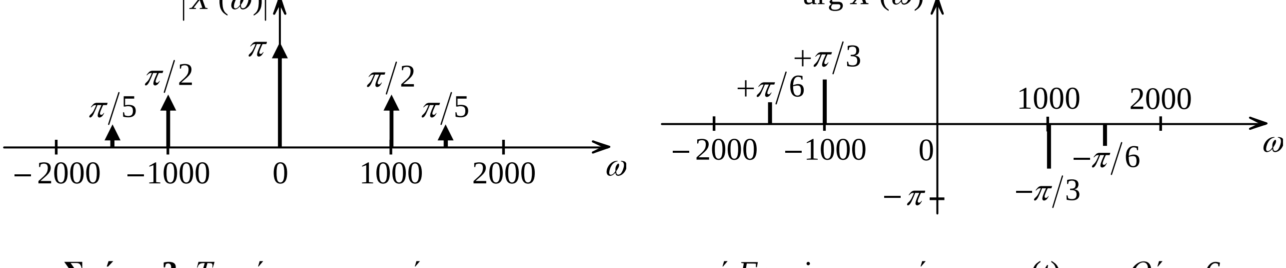
## ΘΕΜΑ 6. (1,5 μονάδες)

Δίνεται γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο (*ΓΧΑ*) σύστημα του οποίου το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας, $H(\omega)$, σε συνάρτηση με τη συχνότητα δίνεται στο Σχήμα 2.




**Σχήμα 2.** *Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας, H(ω),* του *συστήματος στο Θέμα 6.*

Δίνεται επίσης το σήμα $x(t)$ του οποίου το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier σε συνάρτηση με τη συχνότητα δίνονται στο Σχήμα 3




**Σχήμα 3.** *Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού* Fourier *του σήματος, x(t), στο Θέμα 6.*

**6α**) Να γραφεί ο μαθηματικός τύπος ο οποίος περιγράφει το σήμα $x(t)$ σε εκθετική και σε τριγωνομετρική μορφή.
**6β**) Το σήμα $x(t)$ εφαρμόζεται στην είσοδο του *ΓΧΑ* συστήματος. Να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος του σήματος εξόδου του συστήματος, $y(t)$ .

**Λύση:**
**6α**) Από τη γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier του σήματος $x(t)$ σε συνάρτηση με τη συχνότητα παρατηρούμε ότι

$$X(\omega)=\frac{\pi}{5}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(\omega+1500)+\frac{\pi}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(\omega+1000)+\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(\omega-1500)+\frac{\pi}{5}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(\omega+1500)$$

Χρησιμοποιώντας το ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier $e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ βρίσκεται ο μαθηματικός τύπος ο οποίος περιγράφει το σήμα σε εκθετική μορφή

$$x(t)=\frac{1}{10}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j1500t}+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j1000t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{+j1000t}+\frac{1}{10}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{+j1500t}$$

ή

$$x(t)=\frac{1}{10}e^{j\left(-1500t+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{1}{4}e^{j\left(-1000t+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j\left(1000t-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{10}e^{j\left(1500t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί και ως

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\left(1000t-\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-j\left(1000t-\frac{\pi}{3}\right)}}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{e^{j\left(1500t-\frac{\pi}{6}\right)}+e^{-j\left(1500t-\frac{\pi}{6}\right)}}{2}\right)$$

Επομένως ο μαθηματικός τύπος ο οποίος περιγράφει το σήμα σε τριγωνομετρική μορφή είναι ο

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(1000t-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{5}\cos\left(1500t-\frac{\pi}{6}\right)$$

**6β**) Από τη γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας του συστήματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα παρατηρούμε ότι:

- $H(0) = 1$ επομένως η συνεχής συνιστώσα του σήματος διέρχεται χωρίς μεταβολή.
- $H(1000)=1\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$ επομένως η συχνότητα των 1000 rad/sec διέρχεται χωρίς μεταβολή πλάτους και με μεταβολή φάσης κατά $-\pi/2$.
- $H(1500)=0{,}5\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}$ επομένως η συχνότητα των 1500 rad/sec διέρχεται με το μισό πλάτος και με μεταβολή φάσης κατά $-3\pi/4$.

Έτσι το σήμα εξόδου είναι

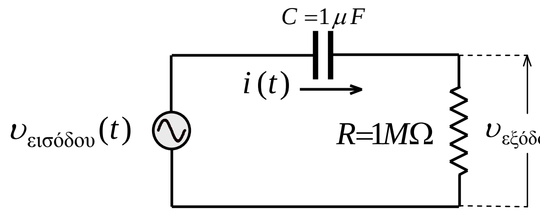
$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(1000t-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos\left(1500t-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)$$

ή

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(1000t-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{1}{10}\cos\left(1500t-\frac{11\pi}{12}\right)$$

## ΘΕΜΑ 7. (1 μονάδα)

Δίνεται το *RC* σε σειρά κύκλωμα του Σχήματος 4.




**Σχήμα 4.** *Το κύκλωμα στο Θέμα 7.*

Να υπολογιστούν

**7α)** η συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του κυκλώματος,
**7β)** η κρουστική απόκριση, $h(t)$, του κυκλώματος και
**7γ)** η συχνότητα – 3 dB.

**Λύση:**
**7α)** Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα έχουμε

$$\upsilon_{in}(t) = \upsilon_c(t) + \upsilon_R(t)$$

δεδομένου ότι

$$\upsilon_c(t) = \frac{1}{C}\cdot Q(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\cdot\frac{dQ(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\cdot i(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\frac{\upsilon_R(t)}{R}$$

έχουμε

$$\upsilon_{in}(t) = \upsilon_c(t) + \upsilon_R(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_{in}(t)}{dt} = \frac{d\upsilon_c(t)}{dt} + \frac{d\upsilon_R(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_{in}(t)}{dt} = \frac{\upsilon_R(t)}{CR} + \frac{d\upsilon_R(t)}{dt}$$

έτσι η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\frac{d\upsilon_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\upsilon_R(t) = \frac{d\upsilon_{in}(t)}{dt}$$

(βλέπε και Παρατήρηση 1). Λαμβάνοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$sU_R(s) + \frac{1}{RC}U_R(s) = sU_{in}(s) \quad \overset{RC=1}{\Rightarrow} \quad sU_R(s) + U_R(s) = sU_{in}(s) \quad \Rightarrow (s+1)U_R(s) = sU_{in}(s)$$

Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{U_R(t)}{U_{in}(t)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{s}{s+1}$$

Το σύστημα έχει ένα πόλο στο σημείο $s = -1$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό το πεδίο σύγκλισης είναι $\Re e\{s\} > -1$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι και ευσταθές αφού περιέχεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης.
**7β)** Η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$H(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

Με αντίστοφο μετασχηματισμό Laplace προσδιορίζεται η κρουστική απόκριση του συστήματος.

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \delta(t) - e^{-t}u(t)$$

(βλέπε και Παρατήρηση 2).
**7γ)** Γνωρίζουμε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega+1}$$

δεδομένου ότι ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης. Το μέτρο της είναι

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{j\omega}{j\omega+1}\cdot\frac{-j\omega}{-j\omega+1}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2+1}}$$

Η συχνότητα – 3 dB είναι η συχνότητα στην οποία το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος αποκτά το $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής της. Η μέγιστη τιμή της είναι $|H(\omega)|_{\max} = 1$ και την αποκτά όταν $\omega \to \infty$. Επομένως,

$$|H(\omega_{-3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\omega)|_{\max} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\omega_{-3dB}^2}{\omega_{-3dB}^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{-3dB} = 1$$

Η συχνότητα – 3 dB. βρίσκεται και με τρόπο ανάλογο του Παραδείγματος 4.4, βλέπε Παρατήρηση 3.

**Παρατηρήσεις:**
**1**) Η εξίσωση που συνδέει το σήμα εξόδου με το σήμα εισόδου βρίσκεται και ως
Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα έχουμε

$$\upsilon_{in}(t)=\upsilon_c(t)+\upsilon_R(t)$$

δεδομένου ότι

$$\upsilon_c(t)=\frac{1}{C}\cdot Q(t) \;=\; \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \;\overset{i(t)=\frac{\upsilon_R(t)}{R}}{=}\; \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}\upsilon_R(\tau)\,d\tau$$

έχουμε την εξίσωση

$$\upsilon_{in}(t)=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}\upsilon_R(\tau)\,d\tau+\upsilon_R(t) \;\overset{L}{\Rightarrow}\; U_{in}(s)=\frac{1}{RC}\frac{1}{s}U_R(s)+U_R(s) \;\Rightarrow \left(\frac{1}{s}+1\right)U_R(s)=U_{in}(s)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος. Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s)=\frac{U_R(t)}{U_{in}(t)} \;\Rightarrow\; H(s)=\frac{1}{1/s+1} \;\Rightarrow\; H(s)=\frac{s}{s+1}$$

Στο Σχήμα 5 έχει γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου της απόκρισης συχνότητας (απόκριση πλάτους) σε συνάρτηση με τη συχνότητα. Παρατηρούμε ότι το σύστημα απόκοπτει τις χαμηλές συχνότητες ενώ επιτρέπει να διέρχονται οι υψηλές συχνότητες. Στο σχήμα υπάρχει και η συχνότητα –3 dB.

**2**. Η κρουστική απόκριση του συτήματος βρίσκεται αν χρησιμοποιηθεί το ζευγάρι ML $e^{-t}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s+1}$ και η ιδιότητα παραγώγου του ML $\frac{dx(t)}{dt}\overset{L}{\longleftrightarrow}sX(s)$ οπότε $\frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{s}{s+1}$ επομένως η κρουστική απόκριση είναι

$$h(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\frac{du(t)}{dt} \;\overset{\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)}{=}\; -e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t) \;\overset{\delta(t)=0,\ t\neq 0}{=}\; \delta(t)-e^{-t}u(t)$$

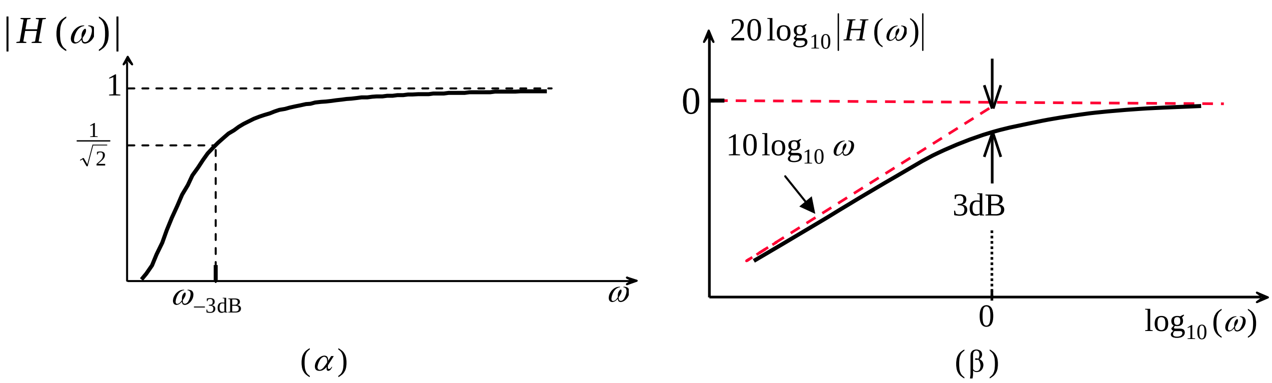
**3**. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι

$$|H(\omega)|=\sqrt{\frac{j\omega}{j\omega+1}\cdot\frac{-j\omega}{-j\omega+1}}=\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2+1}}$$

και σε dB

$$20\log_{10}|H(\omega)|=10\log_{10}(\omega)-10\log_{10}\left[1+\omega^2\right]$$

Στο Σχήμα 5β φαίνεται το διάγραμμα Bode του συστήματος.




**Σχήμα 5.** *Η απόκριση πλάτους του κυκλώματος στο Θέμα 7*

Για χαμηλές συχνότητες $\omega^2+1\approx 1$, επομένως είναι

$$20\log_{10}|H(\omega)|\approx 10\log_{10}(\omega)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο σε dB, $20\log_{10}|H(\omega)|=f(\log_{10}(\omega))$, προσεγγίζει τη γραμμική συνάρτηση του $\log_{10}(\omega)$, η οποία έχει κλίση 20 (βλέπε Σχήμα 5β).

Αντίθετα για υψηλές συχνότητες $\omega^2 + 1 \approx \omega^2$ επομένως ισχύει

$$20\log_{10}|H(\omega)| \approx 0$$

Συνεπώς, στις υψηλές συχνότητες το μέτρο σε dB, προσεγγίζει τον άξονα των συχνοτήτων (βλέπε Σχήμα 5β). Για το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών ισχύει

$$10\log_{10}(\omega_{-3dB}) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{-3dB} = 1.$$

Στη συχνότητα αυτή το μέτρο σε dB είναι

$$20\log_{10}|H(\omega_{-3\mathrm{dB}})| = 10\log_{10}(\omega_{-3\mathrm{dB}}) - 10\log_{10}\left[1 + \omega_{-3\mathrm{dB}}^2\right] = -10\log_{10}(2) \approx -3\mathrm{dB}$$