ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (15/3/2004)

Θ 1. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών το Π.Α.Τ.

$$y'' + ty = 0 \ \ , \ \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1.$$

Θ 2. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ \ , \ \ \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Θ 3. (α) Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2-4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2} \ \ , \ \ y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\varphi(t) < 2$, για κάθε t.

(β) Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \ \ , \ \ t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\boldsymbol{y}(1) = [-2, 1]^t$.

Θ 4. (α) Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t \ \ , \ \ y(0) = \alpha.$$

(β) Αν ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + 5y = f(t),$$

όπου f συνεχής, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0.$$

Θ 5. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y(y^2 - \mu) \ , \ \ \mu > 0.$$

Ειδικότερα για $\mu = 1$ και $y(0) = \dfrac{1}{2}$ να βρεθούν τα $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} y(t)$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t} \ , \ \ 0 < t < 1.$$

(Δίνεται ότι η $y_1(t) = t$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
Α.Μ.: