ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι
17-1-2001

Θέμα 1. Να απαντήσετε με πλήρη δικαιολόγηση αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λάθος:

(α) Το ζεύγος $(\mathbf{R}, \phi)$, όπου $\phi(t) = t^5$, $t \in \mathbf{R}$, ορίζει χάρτη διαφορικά συμβιβαστό με τον $(\mathbf{R}, id_{\mathbf{R}})$.

(β) Εστω $p = (1, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$. Αν η καμπύλη α υλοποιεί το $v \in T_p(\mathbf{R}^3) \equiv T(\mathbf{R}^3, p)$ και η β το $u \in T_p(\mathbf{R}^3)$, τότε η καμπύλη $\gamma = \alpha + \beta$ υλοποιεί το $v + u$.

(γ) Αν $(U, \phi = (x_1, x_2, ..., x_n))$ είναι χάρτης της πολλαπλότητας M και $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq n}$ τα βασικά διανυσματικά πεδία αυτού του χάρτη, τότε $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

(δ) Μιά σταθερή απεικόνιση $\sigma : M \to TM$ είναι διανυσματικό πεδίο.

Θέμα 2. Στο $\mathbf{R}^2$ με την συνήθη διαφορική δομή που ορίζει ο $(\mathbf{R}^2, id_{\mathbf{R}^2})$, θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία $\xi = 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - 3x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ και $\eta = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.

(i) Να υπολογίσετε την διαφορική ροή του ξ.

(ii) Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του διανυσματικού πεδίου $[\xi, \eta]$.

Θέμα 3. (α) Εστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες και $f : X \to Y$ μιά διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν τα διανυσματικά πεδία ξ, η είναι f-συσχετισμένα και η καμπύλη $\alpha : I \to X$ είναι μιά ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, να δείξετε (πλήρως) ότι η καμπύλη $\beta = f \circ \alpha : I \to Y$ είναι μιά ολοκληρωτική καμπύλη του η.

(β) Να οριστεί το διαφορικό $d_x f$ μιάς C^∞-απεικόνισης $f : X \to Y$ και να αποδειχθεί η σχέση

$$(d_x f(v))(g) = v(g \circ f),$$

γιά κάθε $v \in T_x X$, $g \in C^\infty(Y, \mathbf{R})$. [$d_x f \equiv (df)_x$]

Θέμα 4. (α) Δίδεται ομάδα Lie G και $v \in T_e G$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\xi : G \to TG : x \mapsto \xi_x := (dl_x)_e(v)$$

ορίζει ένα διαφορίσιμο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G.

(β) Αν $\mathcal{L}(G)$ είναι η άλγεβρα Lie της G, να κατασκευαστούν $\xi_i \in \mathcal{L}(G)$, $(i = 1, ..., n = dim(G))$, τα οποία αποτελούν βάση του γραμμικού χώρου $\mathcal{L}(G)$.

www.maths.gr