ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι

9/2/1998

Θέμα 1. (α) Τί ονομάζουμε διαφορική δομή σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Δώστε παράδειγμα συνόλου με δύο διαφορετικές διαφορικές δομές.

(β) Τί ονομάζουμε διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\pi : T(X) \to X$ είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 2. (α) Να δοθεί ο ορισμός του γινομένου Lie δύο διανυσματικών πεδίων ξ, η και να αποδειχθεί ότι το $[\xi, \eta]$ είναι διανυσματικό πεδίο.

(β) Αν $\xi, \eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ με $\xi = e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$ και $\eta = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του $[\xi, \eta]$.

Θέμα 3. Εστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : X \to Y$ διαφορίσιμη.

(α) Αν $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και $\eta \in \mathcal{X}(Y)$, δείξτε ότι τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα, εάν και μόνο εάν, γιά κάθε $x \in X$ και γιά κάθε $g \in C^\infty_{f(x)}(Y, \mathbb{R})$, ισχύει $\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$.

(β) Αν $\xi_i \in \mathcal{X}(X)$, $\eta_i \in \mathcal{X}(Y)$ και ξ_i είναι f-συσχετισμένο με το η_i, $i = 1, 2$, να δείξετε ότι $[\xi_1, \xi_2]$ είναι f-συσχετισμένο με το $[\eta_1, \eta_2]$.

Θέμα 4. (α) Να δοθεί ο ορισμός της εκθετικής απεικόνισης μιάς ομάδας Lie G και να αποδειχθεί ότι αυτή μεταφέρει τις ευθείες του $T(G, e)$ στις 1-παραμετρικές υποομάδες της G.

(β) Να δείξετε ότι οι χώροι $T(G, e)$ και $T(G, x)$ είναι ισόμορφοι, γιά κάθε $x \in G$.

Θέμα 5. Εστω $\theta : \mathbb{R} \times X \to X$ διαφορίσιμη ροή, ξ ο απειροστικός της γεννήτορας και $v \in T(\mathbb{R}, 0)$. Ορίζουμε

$$\eta : X \to T(X) : x \mapsto \eta(x) := (d\theta_x)_0(v).$$

(α) Να αποδειχθεί ότι $\eta \in \mathcal{X}(X)$.

(β) Να βρεθεί η σχέση των ξ και η.

(γ) Να βρεθεί η ροή του η.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ